

Relative Reinheit kurzer exakter Folgen von Moduln
und eine Verallgemeinerung der Theorie hereditärer Ringe.



Inaugural-Dissertation zur Erlangung der Doktorwürde
der Fakultät für Mathematik
der Ludwig - Maximilians - Universität zu München

vorgelegt von

Manfred Sommer

aus Amorbach

in München

1972



Berichterstatter : Prof. Dr. F. Kasch

Tag der mündlichen Prüfung : 14.7.1972

Einleitung.

Sei R ein assoziativer Ring mit Einselement.

Ein R -Modul M heißt relativ injektiv für eine kurze exakte Folge von R -Moduln

$$0 \rightarrow A \xrightarrow{f} B \xrightarrow{g} C \rightarrow 0,$$

wenn die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(f, M)$ surjektiv ist, relativ projektiv, wenn $\text{Hom}_R(M, g)$ surjektiv ist.

In dieser Arbeit werden kurze exakte Folgen von Moduln untersucht, für die jeder Modul einer Klasse von Moduln relativ projektiv ist. Diese Folgen werden relativ rein für die betrachtete Klasse von Moduln genannt. Bezeichnet KT diese Klasse von Moduln, dann werden sie auch KT -rein genannt. Im ersten Kapitel werden allgemeine Eigenschaften relativ reiner Folgen untersucht.

Analoge Eigenschaften erhält man, wenn man kurze exakte Folgen von Moduln betrachtet, für die jeder Modul einer Klasse von Moduln relativ injektiv ist. Diese werden relativ korein für die betrachtete Klasse von Moduln genannt, bzw. KF -korein, wenn KF diese Klasse von Moduln bezeichnet. Diese Folgen werden im zweiten Kapitel untersucht.

Der Begriff der Reinheit kurzer exakter Folgen stammt aus der Gruppentheorie. Auf verschiedene Weise haben Warfield (25), Stenström (23), Fieldhouse (8) und Walker (24) dieses Konzept in der Theorie der Moduln eines Ringes verwandt.

Die hier angegebene Definition entspricht der von Warfield und Stenström.

Häufig wurden auch kurze exakte Folgen untersucht, die in der hier benutzten Terminologie relativ rein sind für die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln. Dabei heißt ein Modul endlich präsentierbar, wenn er Faktormodul eines endlich erzeugten freien Moduls nach einem endlich erzeugten Untermodul ist. Relativ zu dieser Klasse reine Folgen werden

rein genannt. In dieser Situation kommt Sabbagh zu folgendem Ergebnis : Ein Modul ist injektiv, genau dann wenn er relativ injektiv für jede reine Folge ist und wenn jede kurze exakte Folge, die mit ihm anfängt, rein ist.

Es besteht daher Anlaß zu folgender allgemeiner Begriffsbildung : Bezeichnet KT eine Klasse von Moduln, dann nenne ich einen Modul KT - rein - injektiv, wenn er relativ injektiv für jede KT - reine Folge ist, KT - absolut - rein, wenn jede kurze exakte Folge, die mit ihm anfängt, KT - rein ist.

Im dritten Kapitel wird gezeigt, daß man die Eigenschaft eines Moduls, injektiv zu sein, ganz allgemein in zwei Teileigenschaften zerlegen kann: Bezeichnet KT eine Klasse von Moduln, dann ist ein Modul injektiv, genau dann wenn er KT - rein - injektiv und KT - absolut - rein ist. Zum Beweis wird folgende im ersten Kapitel bewiesene Tatsache benutzt : Ist KT eine Klasse von Moduln, dann ist ein Modul KT - rein - injektiv, genau dann wenn jede KT - reine Folge, die mit ihm anfängt, zerfällt.

Satz 3.3. kennzeichnet die zu einer Klasse KT von Moduln KT - absolut - reinen Moduln - unter anderem durch die Eigenschaft, relativ injektiv zu sein für jede kurze exakte Folge, die mit einem Modul der Klasse KT endet.

Das hier verwendete Konzept der relativen Reinheit kurzer exakter Folgen gestattet zwei Verallgemeinerungen des Begriffes flach. Lemma 3.5. und Lemma 3.6. untersuchen Moduln mit der Eigenschaft, daß jede kurze exakte Folge, die mit ihnen endet, relativ rein für eine Klasse von Moduln ist. Mit der Klasse der endlich präsentierbaren Moduln erhält man so gerade die flachen Moduln.

Satz 5.6. kennzeichnet Moduln M mit der Eigenschaft : $\text{Tor}_1^R(M, T) = 0$ für jeden Modul T einer Klasse KT . Mit der Klasse der endlich präsentierbaren Moduln erhält man wiederum die flachen Moduln. Man kann daher den Begriff flach auch auf diese Weise verallgemeinern.

Im vierten Kapitel werden die Aussagen des dritten Kapitels dualisiert und man erhält Eigenschaften von Moduln, die relativ zu einer Klasse von Moduln absolut korein sind. Man erhält so eine Zerlegung der Eigenschaft eines Moduln, projektiv zu sein, in zwei Teileigenschaften und eine Kennzeichnung relativ zu einer Klasse KF absolut koreiner Moduln - unter anderem durch die Eigenschaft, relativ projektiv zu sein für jede kurze exakte Folge, die mit einem Modul der Klasse KF beginnt.

Mit Hilfe von Dualitätsformeln werden im fünften Kapitel Zusammenhänge zwischen relativ reinen und relativ koreinen Folgen hergestellt, bzw. zwischen relativ zu einer Klasse von Moduln absolut reinen und absolut koreinen Moduln. Als Ergebnis erhält man unter anderem die schon erwähnte Kennzeichnung verallgemeinerter flacher Moduln.

Cartan & Eilenberg definieren rechtshereditäre Ringe durch eine der beiden folgenden äquivalenten Eigenschaften :

- a) Jeder Faktormodul eines injektiven Rechtsmoduls ist injektiv.
- b) Jeder Untermodul eines projektiven Rechtsmoduls ist projektiv.

Matlis (17) hat gezeigt, daß auch folgende Eigenschaft äquivalent dazu ist :

- c) Jede Summe injektiver Untermoduln eines Rechtsmoduls ist injektiv.

Im sechsten Kapitel wird gezeigt, daß man diese Eigenschaften eines Ringes ganz allgemein formulieren kann :

Für einen Ring R und eine Klasse von R - Rechtsmoduln KT sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- a) Jeder Faktormodul eines KT - absolut - reinen Rechtsmoduls ist KT - absolut - rein.
- a') Jeder Faktormodul eines injektiven Rechtsmoduls ist KT - absolut - rein.

- b) Jeder Untermodul N eines projektiven Rechtsmoduls M mit : M/N ist isomorph zu einem Modul der Klasse KT , ist projektiv.
- c) Die Summe KT - absolut - reiner (injektiver) Untermoduln eines Rechtsmoduls ist stets KT - absolut - rein.

Eigenschaft b) besagt : Die Moduln der Klasse KT haben projektive Dimension ≤ 1 .

- c) lässt sich verallgemeinern, indem man Summen durch Faser-summen ersetzt.

Wählt man für KT die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln, dann erhält man eine neue Charakterisierung semihereditärer Ringe - analog zu der oben angegebenen Kennzeichnung hereditärer Ringe.

In diesem Fall sind direkte Summen (KT -) absolut - reiner Moduln (KT -) absolut - rein und man erhält ausserdem : Jeder Rechtsmodul eines rechtssemihereditären Ringes hat einen eindeutig bestimmten maximalen (KT -) absolut - reinen Untermodul.

Im siebenten Kapitel wird dieses Konzept verallgemeinerter hereditärer Ringe dualisiert . Als Anwendung erhält man eine Charakterisierung von Ringen mit schwacher globaler Dimension ≤ 1 .

Neben dem wichtigsten Anwendungsbeispiel - mit der Klasse der endlich präsentierbaren Moduln - werden im achten Kapitel unter anderem relativ zu einer Klasse KT von Moduln reine Folgen untersucht, wo KT die Klasse der Torsionsmoduln einer Torsionstheorie ist. KT - absolut - reine Moduln lassen sich dann durch Injektivität für Inklusionen von Rechtsidealen des zugehörigen idempotenten Idealfilters in den Ring charakterisieren. Sind diese Rechtsideale projektiv, dann erhält man in diesem Fall gerade die verallgemeinerten hereditären Ringe.

Herrn Professor Dr. F. Kasch danke ich für die Anregungen zu dieser Arbeit.

Inhaltsübersicht :

	Bezeichnungen :	Seite 2
1.	KT - reine Folgen :	Seite 3
2.	KF - koreine Folgen :	Seite 10
3.	KT - absolut - reine Moduln :	Seite 14
4.	KF - absolut - koreine Moduln :	Seite 19
5.	Anwendung von Dualitätsformeln :	Seite 21
6.	KT - hereditäre Ringe :	Seite 28
7.	KF - kohereditäre Ringe :	Seite 34
8.	Anwendungen	
8.1.	mit der Klasse aller Moduln :	Seite 40
8.2.	mit der Klasse der singulären Moduln :	Seite 41
8.3.	mit der Klasse der zyklischen Moduln :	Seite 42
8.4.	mit der Klasse	
	der endlich präsentierbaren Moduln :	Seite 43
8.5.	RD - reine Folgen :	Seite 47
8.6.	Reinheit und Torsionstheorien :	Seite 48
	Literaturverzeichnis :	Seite 52

Bezeichnungen :

In dieser Arbeit bezeichnen R, S stets assoziative Ringe mit Einselement.

Alle betrachteten Moduln sind unitäre R - Moduln.

M_R bzw. ${}_R^M$ steht abkürzend für : M ist ein R - Rechtsmodul bzw. R - Linksmodul.

${}_S^M{}_R$ bzw. ${}_R^M{}_S$ steht abkürzend für : M ist ein S - R - Bimodul bzw. R - S - Bimodul.

Die ganzen und die rationalen Zahlen bezeichne ich mit Z und Q .

$*$ ist stets der Funktor $\text{Hom}(, Q/Z)$.

Begriffe aus der homologischen Algebra, wie etwa : $\text{Hom}_R(f, M_R)$,

$\text{Ext}_R^1(A_R, M_R)$, $\text{Tor}_1^R(M_R, N)$ usw., benütze ich im Sinne der

Definitionen des Buches von Cartan & Eilenberg (3) .

Wenn nicht ausdrücklich anders festgelegt, bezeichnet

KT stets eine Klasse von R - Rechtsmoduln, KF eine

Klasse von R - Linksmoduln.

Die von diesen Klassen abgeleiteten Klassen $KT1, KT2, KF1$

und $KF2$ sind am Anfang des ersten und zweiten Kapitels definiert.

1. KT - reine Folgen .

Stenström (22) und Warfield (25) verwenden ein sehr allgemeines Konzept der Reinheit kurzer exakter Folgen von Moduln. Dem folgend definiere ich :

1.1. Definition :

KT sei eine beliebige Klasse unitärer R - Rechtsmoduln.

Eine kurze exakte Folge von R - Rechtsmoduln

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

heißt KT - rein, wenn sie relativ projektiv ist für jeden Modul $T \in KT$, wenn also für jedes $T \in KT$ die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(T, B) \rightarrow \text{Hom}_R(T, C)$ surjektiv ist.

Ein R - Rechtsmodul M heißt KT - rein - projektiv, wenn er relativ projektiv ist für jede KT - reine Folge

$$0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$$

wenn also die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C)$ surjektiv ist.

Die Klasse der KT - rein - projektiven Moduln wird in dieser Arbeit stets mit KT_1 bezeichnet. Da jeder projektive Modul für jede Klasse KT KT - rein - projektiv ist, wird auch noch die mit KT_2 bezeichnete Klasse der KT - rein - projektiven Moduln, die nicht projektiv sind, betrachtet.

Für jede Klasse KT von Moduln sind die zerfallenden Folgen KT - rein . Ist KT die Klasse aller R - Rechtsmoduln, dann sind die KT - reinen Folgen genau die zerfallenden.

Jede kurze exakte Folge von R - Rechtsmoduln ist KT - rein, genau dann wenn jeder Modul der Klasse KT projektiv ist.

Ist KT die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln, dann erhält man die reinen Folgen im Sinne von Sabbagh (18), Maddox (16) und Fieldhouse (8). Auf dieses und auf andere Beispiele werde ich genauer im 8. Kapitel eingehen.

Ähnliche Definitionen wie 1.1. enthält auch die Arbeit von J.M.Maranda : Injective Structures, Trans.Am.Math.Soc.110

KT1 ist die größte Klasse KX, für die die KT - reinen Folgen genau die KX - reinen Folgen sind. Dies zeigt das folgende Lemma. Eine kleinste Klasse mit dieser Eigenschaft kann man im allgemeinen nicht angeben.

1.2. Lemma :

Für eine kurze exakte Sequenz $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow 0$ von R - Rechtsmoduln sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- a) Die Sequenz ist KT - rein .
- b) Die Sequenz ist KT1 - rein.
- c) Die Sequenz ist KT2 - rein.

Beweis :

Da KT und KT2 in KT1 enthalten sind, sind die Implikationen b) $\Rightarrow$ a) und b) $\Rightarrow$ c) klar.

Aus der Definition von 'KT-rein projektiv' folgt : a) $\Rightarrow$ b)

Zum Beweise von c) $\Rightarrow$ b) überlegt man sich :

Ist $T \in KT1$, dann ist $T \in KT2$ oder T ist projektiv.

In beiden Fällen ist T relativ projektiv für die gegebene Sequenz .

Das folgende Lemma ermöglicht es in vielen Fällen , die Struktur der KT - rein projektiven Moduln anzugeben .

1.3. Lemma :

- a) Eine direkte Summe von Moduln ist KT - rein projektiv , genau dann, wenn jeder ' Summand ' diese Eigenschaft hat.
- b) Ist KT eine Menge, dann gibt es zu jedem Modul M_R eine KT - reine Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow F \otimes T \longrightarrow M \longrightarrow 0$ so das F ein freier R - Rechtsmodul und T eine direkte Summe von Moduln der Klasse KT ist .
- c) Folgerung : Die KT - rein projektiven Moduln sind gerade die direkten Summanden solcher Moduln $F \otimes T$, wenn KT eine Menge ist.

Beweis :

a) ist klar auf Grund der bekannten Isomorphie von

$$\text{Hom}_R(\bigoplus_{i \in I} M_i, X_R) \quad \text{und} \quad \prod_{i \in I} \text{Hom}_R(M_i, X_R)$$

b) Der Beweis findet sich bei Warfield (25).

Mit Hilfe des folgenden Lemmas kann man kurze exakte Folgen auch auf andere Weise auf KT - Reinheit testen.

1.4. Lemma :

Eine kurze exakte Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$ ist KT - rein, genau dann wenn zu jedem Diagramm

$$(*) \quad \begin{array}{ccccccc} 0 & \rightarrow & A_R & \xrightarrow{f_1} & B_R & \xrightarrow{f_2} & C_R \rightarrow 0 \\ & & \uparrow g_1 & & \uparrow g_2 & & \uparrow g_3 \\ 0 & \rightarrow & X_R & \xrightarrow{f_3} & Y_R & \xrightarrow{f_4} & T_R \rightarrow 0 \end{array}$$

mit kommutativen Quadraten, exakten Zeilen, $T \in \text{KT}$ (und freiem Y) einer und damit beide der folgenden Homomorphismen existieren :

1. $h_1 : Y \rightarrow A$ mit $g_1 = h_1 f_3$
2. $h_2 : T \rightarrow B$ mit $g_3 = f_2 h_2$

Beweis :

Ist die obere Zeile des Diagrammes (*) KT - rein, dann existiert h_2 per definitionem.

Dann gilt : $f_2(g_2 - h_2 f_4) = 0$,

also auch : $\text{Bild}(g_2 - h_2 f_4) \subseteq \text{Kern } f_2 = \text{Bild } f_1$.

Daher existiert $h_1 := f_1^{-1}(g_2 - h_2 f_4)$

und nach Konstruktion gilt : $g_1 = h_1 f_3$.

Ist umgekehrt eine exakte Folge $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$ und ein $T \in \text{KT}$ gegeben, dann gibt es auch eine exakte Folge $0 \rightarrow X_R \rightarrow Y_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$ mit freiem Y_R .

Zu vorgegebenem $g_3 \in \text{Hom}_R(T, C)$ existieren dann auch g_2 und g_1 , so daß man ein Diagramm (*) mit kommutativen Quadraten, exakten Zeilen (und freiem Y) erhält.

Nach Voraussetzung existiert dann also ein $h_2 \in \text{Hom}_R(T, B)$

mit : $g_3 = f_2 h_2$ oder es existiert ein $h_1 \in \text{Hom}(Y, A)$

mit : $g_1 = h_1 f_3$. Ist das letztere der Fall, dann gilt :

$\text{Kern } f_4 \subseteq \text{Kern}(g_2 - f_1 h_1)$ und es existiert ein $h_2 \in \text{Hom}_R(T, B)$

mit : $h_2 f_4 = g_2 - f_1 h_1$. Dann gilt aber auch : $f_2 h_2 = g_3$.

In jedem Fall ist die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(T, B) \rightarrow \text{Hom}_R(T, C)$

surjektiv, die obere Zeile des Diagrammes (*) also KT - rein.

Im Folgenden wird untersucht, wie sich KT - Reinheit von einer auf andere Sequenzen vererbt. Dazu benötige ich folgende Eigenschaften von pullback und pushout Diagrammen, die man auch dem Buch von Freyd (9) entnehmen kann.

1.5. Definition und Lemma :

Gegeben sei das Diagramm :

$$(*) : \begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & M_R \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\ N & \xrightarrow{f_2} & B_R \end{array}$$

Dann gibt es folgende Homomorphismen :

$$v : A \ni a \longrightarrow (f_1 a, -g_1 a) \in M \oplus N$$

$$p : M \oplus N \ni (m, n) \longrightarrow g_2 m + f_2 n \in B$$

Ist nun $0 \longrightarrow A \xrightarrow{v} M \oplus N \xrightarrow{p} B$ exakt, dann heißt

(*) pullback Diagramm und wie man leicht nachrechnet gilt :
Kern f_1 und Kern f_2 sind isomorph.

Ist nun $A \xrightarrow{v} M \oplus N \xrightarrow{p} B \longrightarrow 0$ exakt, dann heißt

(*) pushout Diagramm und wie man leicht nachrechnet gilt :
Kokern f_1 und Kokern f_2 sind isomorph.

Pullback und pushout Diagramme sind kommutative Diagramme.

1.6. Lemma :

(*) : $0 \rightarrow D_R \xrightarrow{\quad} N_R \xrightarrow{f_2} B_R \rightarrow 0$ sei eine exakte Folge,

$$\begin{array}{ccccc} & & f_1 & & \\ & A_R & \xrightarrow{\quad} & M_R & \\ \varepsilon_1 \downarrow & & & & \downarrow \varepsilon_2 \\ & N_R & \xrightarrow{f_2} & B_R & \end{array} \quad \text{ein pullback Diagramm.}$$

Dann ist auch die Folge (+) : $0 \rightarrow \text{Kern } f_1 \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow 0$ exakt, und es gilt :

Ist die Folge (*) KT - rein, dann auch die Folge (+).

Beweis :

Die Exaktheit von (+) ist im Buch von Freyd (9) bewiesen.

Die 2. Aussage des Lemmas beweise ich mit Hilfe von Lemma 1.4. und Lemma 1.5. :

Sei $T \in \text{KT}$ gegeben. Dann kann man mit dem in Lemma 1.5. erwähnten Isomorphismus zwischen Kern f_1 und Kern $f_2 = D$ folgendes Diagramm mit kommutativen Quadraten und exakten Zeilen konstruieren :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & \longrightarrow & X & \xrightarrow{f_3} & Y & \longrightarrow & T \longrightarrow 0 \\ & & \varepsilon_3 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & \text{Kern } f_1 & \xrightarrow{f_1} & A & \longrightarrow & M \longrightarrow 0 \\ & & \varepsilon_4 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ 0 & \longrightarrow & D & \longrightarrow & N & \longrightarrow & B \longrightarrow 0 \end{array}$$

Nach Voraussetzung ist die untere Zeile des Diagrammes KT - rein. Aus Lemma 1.4. folgt nun die Existenz eines Homomorphismus $h \in \text{Hom}_R(Y, D)$ mit : $hf_3 = \varepsilon_4 \varepsilon_3$.

Dann existiert auch $\varepsilon_4^{-1}h$ mit : $(\varepsilon_4^{-1}h)f_3 = \varepsilon_3$.

Man kann daher wieder Lemma 1.4. anwenden und erhält :

Die mittlere Zeile des Diagrammes - also die Folge (+) - ist KT - rein, was zu zeigen war.

Analog beweist man das folgende Lemma.

1.7. Lemma :

(*) : $0 \rightarrow A_R \xrightarrow{f_1} M_R \rightarrow D_R \rightarrow 0$ sei eine exakte Folge,

$$\begin{array}{ccc} A_R & \xrightarrow{f_1} & M_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_R & \xrightarrow{f_2} & B_R \end{array} \quad \text{ein pushout Diagramm.}$$

Dann ist auch die Folge $(+) : 0 \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow \text{Kokern } f_2 \rightarrow 0$ exakt, und es gilt :

Ist die Folge (*) KT - rein, dann auch die Folge (+).

1.8. Definition :

Ein R - Rechtsmodul M heißt KT - rein - injektiv, wenn er relativ injektiv ist für jede KT - reine Folge

$0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$, wenn also die natürliche

Abbildung $\text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$ surjektiv ist.

Injektive Moduln sind stets KT - rein - injektiv.

1.9. Lemma :

Ein Modul M_R ist KT - rein - injektiv, genau dann wenn jede KT - reine Folge $0 \rightarrow M_R \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow 0$ zerfällt.

Beweis :

Ist M KT - rein - injektiv und $0 \rightarrow M \xrightarrow{f} A \rightarrow B \rightarrow 0$

KT - rein, dann existiert ein $g \in \text{Hom}_R(A, M)$ mit $gf = 1_M$.

Die Folge zerfällt also.

Zerfällt umgekehrt jede KT - reine Folge, die mit M anfängt,

ist die KT - reine Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$

und $f_1 \in \text{Hom}_R(A, M)$ gegeben, dann kann man mit der in Lemma 1.5.

angegebenen Abbildung v und $N := \text{Kokern } v$ ein pushout

Diagramm konstruieren.

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f_1} & M \\ \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 \\ B & \xrightarrow{f_2} & N \end{array}$$

Man erhält so mit Hilfe von Lemma 1.7. die KT - reine Folge $0 \rightarrow M \rightarrow N \rightarrow \text{Kokern } g_2 \rightarrow 0$, die nach Voraussetzung zerfällt, d.h. es gibt ein $g_3 \in \text{Hom}_R(N, M)$ mit : $g_3 g_2 = 1_M$.

Dann gilt : $f_1 = g_3 f_2 g_1$ und damit ist gezeigt :

Die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$

ist surjektiv, also ist M KT - rein - injektiv.

1.10. Lemma :

(*) sei folgende Eigenschaft einer exakten Folge

(+) : $0 \rightarrow A_R \xrightarrow{f} B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$:

Für jeden Modul X_R mit : $\text{Bild } f \subseteq X \subseteq B$ und $X/\text{Bild } f \in \text{KT}$ gilt : $\text{Bild } f$ ist direkter Summand von X .

Dann gilt :

- a) Jede KT - reine Folge (+) hat die Eigenschaft (*).
- b) Ist die Klasse KT abgeschlossen gegen Faktormodulbildung, dann ist jede Folge (+), die die Eigenschaft (*) hat, KT - rein.

Beweis :

a) folgt sofort aus Lemma 1.4.

b) : Hat die Folge (+) die Eigenschaft (*) und ist $h \in \text{Hom}_R(T, C)$ gegeben, dann gibt es einen Modul X_R

mit : $\text{Bild } f \subseteq X \subseteq B$ und : Die Folge

(") : $0 \rightarrow A \xrightarrow{f} X \rightarrow \text{Bild } h \rightarrow 0$ ist exakt.

Nach Voraussetzung über die Klasse KT gilt : $\text{Bild } h \in \text{KT}$

Da nach Voraussetzung die Folge (+) die Eigenschaft (*) hat, zerfällt die Folge ("). Daraus folgt :

$\text{Hom}_R(T, B) \rightarrow \text{Hom}_R(T, C)$ ist surjektiv, also ist die Folge (+) KT - rein.

Walker definiert in (24) durch die Eigenschaft (*) relativ zu einer Klasse von Moduln reine Folgen von Moduln. Lemma 1.10. zeigt, daß im Allgemeinen mehr Folgen im Sinne von Walker als im Sinne von Definition 1.1. rein sind.

2. KF - koreine Folgen .

Das im ersten Kapitel entwickelte Konzept relativ zu einer Klasse K^m von Moduln reiner Folgen lässt sich dualisieren indem man den Begriff 'relativ projektiv' durch 'relativ injektiv' ersetzt.

In diesem Kapitel gebe ich Definitionen und Sätze an, die zu denjenigen des ersten Kapitels analog sind.

Die Beweise sind weggelassen, da man diese durch dualisieren erhält.

2.1. Definition :

KF sei eine beliebige Klasse unitärer R - Linksmoduln.

Eine kurze exakte Folge von R - Linksmoduln

$$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$$

heißt KF - korein, wenn sie relativ injektiv ist für jeden Modul $F \in KF$, wenn also für jedes $F \in KF$ die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(B, F) \rightarrow \text{Hom}_R(A, F)$ surjektiv ist.

Ein R - Linksmodul M heißt KF - korein - injektiv, wenn er relativ injektiv ist für jede KF - koreine Folge

$$0 \rightarrow {}_R A \rightarrow {}_R B \rightarrow {}_R C \rightarrow 0$$

wenn also die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(B, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M)$ surjektiv ist.

Die Klasse der KF - korein - injektiven Moduln wird in dieser Arbeit stets mit $KF1$ bezeichnet. Da jeder injektive Modul für jede Klasse KF KF - korein - injektiv ist, wird auch noch die mit $KF2$ bezeichnete Klasse der KF - korein - injektiven Moduln, die nicht injektiv sind, betrachtet.

Für jede Klasse KF von Moduln sind die zerfallenden Folgen KF - korein. Ist KF die Klasse aller R - Linksmoduln, dann sind die KF - koreinen Folgen genau die zerfallenden.

Jede kurze exakte Folge von R - Linksmoduln ist KF - korein, genau dann wenn jeder Modul der Klasse KF injektiv ist.

KF1 ist die größte Klasse KX, für die die KF - koreinen Folgen genau die KX - koreinen Folgen sind. Dies zeigt das folgende Lemma. Eine kleinste Klasse mit dieser Eigenschaft kann man im allgemeinen nicht angeben.

2.2. Lemma :

Für eine kurze exakte Folge $O \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow O$ von R - Linksmoduln sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- a) Die Folge ist KF - korein .
- b) Die Folge ist KF1 - korein .
- c) Die Folge ist KF2 - korein .

2.3. Lemma :

- a) Ein direktes Produkt von Moduln ist KF-korein injektiv genau dann, wenn jeder ' Faktor ' diese Eigenschaft hat.
- b) Ist KF eine Menge, dann gibt es für jeden Modul R^M eine kurze exakte KF - koreine Sequenz, die folgende Form hat :
 $O \rightarrow M \rightarrow K \circ F \rightarrow N \rightarrow O$

Dabei ist K ein direktes Produkt isomorpher Kopien eines Kogenerators , F ein direktes Produkt von Elementen von KF.

- c) Folgerung : Die KF - korein injektiven Moduln sind isomorph zu direkten Summanden solcher Moduln $K \circ F$.

2.4. Lemma :

Eine kurze exakte Sequenz $O \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow C \longrightarrow O$ ist KF - korein, genau dann, wenn in jedem Diagramm

$$\begin{array}{ccccccc}
 O & \longrightarrow & A & \xrightarrow{f_1} & B & \xrightarrow{f_2} & C \longrightarrow O \\
 (*) & & \downarrow g_1 & & \downarrow g_2 & & \downarrow g_3 \\
 O & \longrightarrow & F & \xrightarrow{f_3} & X & \xrightarrow{f_4} & Y \longrightarrow O
 \end{array}$$

mit kommutativen Quadraten und exakten Zeilen und $F \in KF$ eine und damit beide der folgenden Abbildungen existieren :

- 1. $h_1 : B \longrightarrow F$ mit $g_1 = h_1 f_1$
- 2. $h_2 : C \longrightarrow X$ mit $g_3 = f_4 h_2$

Es genügt, dies für alle Diagramme (*) zu fordern, in denen zusätzlich R^X eine injektive Hülle von R^F ist.

2.5. Lemma :

Wie Lemma 1.5. - nur für Linksmoduln.

2.6. Lemma :

(*) : $0 \rightarrow {}_R A \xrightarrow{f_1} {}_R M \rightarrow {}_R D \rightarrow 0$ sei eine exakte Folge,

$$\begin{array}{ccc} {}_R A & \xrightarrow{f_1} & {}_R M \\ \varepsilon_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 \\ {}_R N & \xrightarrow{f_2} & {}_R B \end{array} \quad \text{ein pushout Diagramm.}$$

Dann ist auch die Folge $(+) : 0 \rightarrow N \rightarrow B \rightarrow \text{Kokern } f_2 \rightarrow 0$ exakt, und es gilt :

Ist die Folge (*) KF - korein, dann auch die Folge (+).

2.7. Lemma :

(*) : $0 \rightarrow {}_R D \rightarrow {}_R N \xrightarrow{f_2} {}_R B \rightarrow 0$ sei eine exakte Folge,

$$\begin{array}{ccc} {}_R A & \xrightarrow{f_1} & {}_R M \\ \varepsilon_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 \\ {}_R N & \xrightarrow{f_2} & {}_R B \end{array} \quad \text{ein pullback Diagramm.}$$

Dann ist auch die Folge $(+) : 0 \rightarrow \text{Kern } f_1 \rightarrow A \rightarrow M \rightarrow 0$ exakt, und es gilt :

Ist die Folge (*) KF - korein, dann auch die Folge (+).

2.8. Definition :

Ein R - Linksmodul M heißt KF - korein - projektiv, wenn er relativ projektiv ist für jede KF - koreine Folge $0 \rightarrow {}_R A \rightarrow {}_R B \rightarrow {}_R C \rightarrow 0$, wenn also die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R(M, B) \rightarrow \text{Hom}_R(M, C)$ surjektiv ist.

Projektive Moduln sind stets KF - korein - projektiv.

2.9. Lemma :

Ein Modul ${}_R M$ ist KF - korein - projektiv, genau dann, wenn jede KF - koreine Folge $0 \longrightarrow A \longrightarrow B \longrightarrow M \longrightarrow 0$ zerfällt.

2.10 Lemma :

(*) sei folgende Eigenschaft einer kurzen exakten Sequenz :

$$0 \longrightarrow A \xrightarrow{f} B \longrightarrow C \longrightarrow 0 : (+)$$

Für alle ${}_R X$ mit $X \subseteq A$ und $A/X \cong F \in \text{KF}$

gilt : A/X ist direkter Summand von B/fX .

Dann gilt :

- a) Jede KF - koreine Folge (+) hat die Eigenschaft (*) .
- b) Ist KF gegen Untermodulbildung abgeschlossen, dann ist jede Folge (+) mit der Eigenschaft (*) KF - korein .

Diese Eigenschaft (*) ist die definierende Eigenschaft für koreine Folgen im Sinne von Walker (24) .

3. KT - absolut - reine Moduln.

Maddox (16), Sabbagh (13) und Fieldhouse (8) folgend, nenne ich einen Modul M_R KT - absolut - rein, wenn er folgende Eigenschaft hat : Jede kurze exakte Folge von Rechtsmoduln, die mit M anfängt, ist KT - rein. Dabei verallgemeinere ich die Definition der genannten Autoren insofern, als diese nur den Fall betrachten, daß KT die Klasse der endlich präsentierbaren Rechtsmoduln ist. Mit Hilfe dieses Begriffes lässt sich die Eigenschaft eines Moduls, injektiv zu sein, in zwei Teileigenschaften zerlegen : Für jede Klasse KT von Rechtsmoduln gilt : Ein Modul M_R ist injektiv, genau dann wenn er KT - absolut - rein und KT - rein - injektiv ist. Diese Charakterisierung injektiver Moduln (Lemma 3.4.) und eine Kennzeichnung KT - absolut - reiner Moduln durch relative Injektivität für gewisse Folgen (Satz 3.3.) sind die wesentlichen Ergebnisse dieses Kapitels.

3.1. Lemma :

Für eine Klasse von R - Rechtsmoduln KT und einen Modul M_R sind folgende Eigenschaften äquivalent :

a) $\text{Ext}_R^1(T, M) = 0$ für alle $T \in \text{KT}$.

b) Jede exakte Folge

$$(*) : 0 \longrightarrow M_R \longrightarrow A_R \longrightarrow B_R \longrightarrow 0 \quad \text{ist KT - rein.}$$

Beweis :

Ausgehend von der Folge (*) kann man einen verbindenden Homomorphismus g finden, der die folgende Sequenz mit den f und h genannten natürlichen Abbildungen - exakt macht (siehe Cartan & Eilenberg (3)) :

$$(+): \text{Hom}_R(T, A) \xrightarrow{f} \text{Hom}_R(T, B) \xrightarrow{E} \text{Ext}_R^1(T, M) \xrightarrow{h} \text{Ext}_R^1(T, A)$$

a) $\Rightarrow$ b) : Ist die Folge (*) gegeben, dann ist nach Voraussetzung in der Sequenz (+) Bild $g = 0$, f also surjektiv, die Folge (*) also KT - rein.

b) $\Rightarrow$ a) : Wegen der Existenz von injektiven Erweiterungen

gibt es exakte Folgen (*) in denen A_R ein injektiver Modul ist. Dann gilt $\text{Ext}_R^1(T, A) = 0$, also $\text{Bild } h = 0$. Nach Voraussetzung ist jede exakte Folge (*) KT - rein, f ist also stets surjektiv und daher gilt : $\text{Ext}_R^1(T, M) = 0$ für alle $T \in \text{KT}$.

3.2. Definition :

Ein Modul M_R heißt KT - absolut - rein, wenn er eine und damit beide der Eigenschaften a) und b) von Lemma 3.1. hat.

Injektive Moduln sind KT - absolut - rein für jede Klasse KT. Weitere kennzeichnende Eigenschaften KT - absolut - reiner Moduln findet man in dem folgenden Satz:

3.3. Satz :

Für eine Klasse von R - Rechtsmoduln KT und einen Modul M_R sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- a) M ist KT - absolut - rein.
- b) $\text{Ext}_R^1(T, M) = 0$ gilt für alle $T \in \text{KT1}$ oder KT2 .
- c) Es gibt eine KT - reine Folge

$$0 \rightarrow M_R \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow 0$$
mit KT - absolut - reinem A_R .
- d) M ist relativ injektiv für jede exakte Folge

$$0 \rightarrow A_R \rightarrow F_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$$
, in der F freier R - Rechts-Modul ist und $T \in \text{KT}$ (oder $\text{KT1}, \text{KT2}$) gilt.
- e) M ist relativ injektiv für jede exakte Folge

$$0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$$
 mit : $T \in \text{KT}$ (oder $\text{KT1}, \text{KT2}$).

Beweis :

- a) und b) sind wegen Lemma 1.2. und Lemma 3.1. äquivalent.
- a) $\Rightarrow$ c) : Lemma 3.1. und $A_R :=$ injektiver R - Rechtsmodul.
- c) $\Rightarrow$ a) : Wie der Beweis b) $\Rightarrow$ a) von Lemma 3.1., wenn man den injektiven Modul A_R durch einen KT - absolut - reinen ersetzt.
- a) $\Rightarrow$ e) : Zu einer exakten Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$

kann man eine exakte Sequenz

$$\text{Hom}_R(B, M) \xrightarrow{f} \text{Hom}_R(A, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(T, M)$$

konstruieren, in der f die kanonische Abbildung ist (siehe Cartan & Eilenberg (3)). Nach Voraussetzung ist M KT - absolut - rein, daher gilt $\text{Ext}_R^1(T, M) = 0$ für alle $T \in KT$. f ist also surjektiv und M daher relativ injektiv für die Folge $0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow T \rightarrow 0$.

c) $\Rightarrow$ d) : trivial.

d) $\Rightarrow$ a) :

Zu $T \in KT$ gibt es eine exakte Folge

$$(*) : 0 \rightarrow A \rightarrow F_R \rightarrow T_R \rightarrow 0 \text{ mit freiem } F_R.$$

Mit Hilfe von Cartan & Eilenberg (3) kann man dann wieder eine exakte Sequenz $\text{Hom}_R(F, M) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(T, M) \rightarrow \text{Ext}_R^1(F, M)$

konstruieren. In dieser Sequenz ist die erste Abbildung surjektiv, da nach Voraussetzung M relativ injektiv für die Folge $(*)$ ist. Da F_R frei ist, gilt $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0$, also gilt auch $\text{Ext}_R^1(T, M) = 0$, was zu zeigen war.

Wegen Lemma 1.2. kann man in den Behauptungen d) und e) KT durch KT_1 oder KT_2 ersetzen.

3.4. Lemma :

- a) Ein Produkt KT - absolut - reiner Moduln ist KT - absolut - rein, genau dann wenn jeder Faktor diese Eigenschaft hat.
- b) Ein Modul M_R ist injektiv, genau dann wenn er KT - absolut - rein und KT - rein - injektiv ist.

Beweis :

- a) folgt aus Satz 3.3. Teil e) und der bekannten Tatsache, daß $\text{Hom}(X,)$ mit direkten Produkten vertauscht.
- b) Ist M ein KT - absolut - reiner Modul, und Q_R eine injektive Erweiterung von M , dann ist die Folge $(*) : 0 \rightarrow M \rightarrow Q \rightarrow Q/M \rightarrow 0$ KT - rein. Wenn M außerdem noch KT - rein - injektiv ist, dann zerfällt die Folge $(*)$ wegen Lemma 1.9. M ist also isomorph zu einem direkten Summanden eines injektiven Moduls, also injektiv. Der Beweis der Umkehrung ist trivial.

3.5. Lemma :

(*) sei folgende Eigenschaft eines Moduls M_R :

Jede exakte Folge $0 \longrightarrow A_R \longrightarrow B_R \longrightarrow M_R \longrightarrow 0$ ist KT - rein.

Dann sind äquivalent :

a) M_R hat die Eigenschaft (*).

b) Es gibt eine KT - reine Folge

$$0 \longrightarrow A_R \longrightarrow B_R \longrightarrow M_R \longrightarrow 0$$

in der B_R die Eigenschaft (*) hat.

Beweis :

a) $\Rightarrow$ b) ist klar, da projektive Moduln die Eigenschaft (*) haben.

b) $\Rightarrow$ a) :

$0 \longrightarrow X_R \longrightarrow Y_R \longrightarrow M_R \longrightarrow 0$ sei gegeben (+)

$0 \longrightarrow A_R \longrightarrow B_R \longrightarrow M_R \longrightarrow 0$ sei die KT - reine Folge, so das

B die Eigenschaft (*) hat.

Man bildet nun ein pullback Diagramm zu Y, M und B , und erhält für $T \in KT$ ein kommutatives Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}(T, Z) & \xrightarrow{1} & \text{Hom}(T, B) \\ 2 \downarrow & & \downarrow 3 \\ \text{Hom}(T, Y) & \xrightarrow{4} & \text{Hom}(T, M) \end{array}$$

in dem nach Voraussetzung die Abbildungen 1 und 3 surjektiv sind, also auch die Abbildung 4, woraus folgt, daß die Folge (+) KT - rein ist.

Ist KT die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln, dann sind die Moduln mit der Eigenschaft (*) gerade die flachen. Die Eigenschaft (*) ist also eine Verallgemeinerung des Begriffes ' flach ' .

Ringe - bzw. Klassen KT von Rechtsmoduln - für die injektive Rechtsmoduln die Eigenschaft (*) von Lemma 3.5. haben, kann man wie folgt charakterisieren :

3.6. Lemma :

Folgende Eigenschaften eines Ringes sind äquivalent :

- a) Injektive Rechtsmoduln haben Eigenschaft (*) von Lemma 3.5.
- b) Jeder Modul $T \in KT$ ist isomorph zu einem Untermodul eines freien Rechtsmoduls.

Beweis :

a) $\Rightarrow$ b) :

Zu $T \in KT$ gibt es einen injektiven Erweiterungsmodul Q_R .

Zu Q gibt es eine exakte Folge $0 \longrightarrow X_R \longrightarrow F_R \longrightarrow Q_R \longrightarrow 0$

in der F frei ist. Nach Voraussetzung ist diese Folge KT - rein.

Daher gibt es einen Monomorphismus $T \longrightarrow F$.

b) $\Rightarrow$ a) :

Sei $0 \longrightarrow A_R \longrightarrow B_R \longrightarrow Q_R \longrightarrow 0 : (+)$ exakt und Q injektiv.

Zu $T \in KT$ gibt es nach Voraussetzung einen Monomorphismus in einen freien Modul F_R . Es gibt nun ein mit den natürlichen Abbildungen versehenes kommutatives Diagramm :

$$\begin{array}{ccc}
 \text{Hom}_R(F, B) & \xrightarrow{1} & \text{Hom}_R(F, Q) \\
 2 \downarrow & & \downarrow 3 \\
 \text{Hom}_R(T, B) & \xrightarrow{4} & \text{Hom}_R(T, Q)
 \end{array}$$

In diesem Diagramm ist die Abbildung 1 surjektiv, da F frei, also projektiv ist. Die Abbildung 3 ist surjektiv, da Q injektiv ist. Wegen der Kommutativität ist dann auch die Abbildung 4 surjektiv. Dies bedeutet aber, daß die Folge (+) KT - rein ist, woraus folgt, daß Q die Eigenschaft (*) von Lemma 3.5. hat.

4. KF - absolut - koreine Moduln.

Ebenso wie im zweiten Kapitel werde ich in diesem Kapitel die koreinen Folgen und ihre Eigenschaften untersuchen. Das Kapitel enthält die Sätze des dritten Kapitels in dualisierter Form. Die Beweise erhält man durch dualisieren der entsprechenden Beweise des dritten Kapitels.

4.1. Lemma :

Für jede Klasse von R - Linksmoduln KF und für den Modul ${}_R M$ sind folgende Eigenschaften äquivalent :

a) $\text{Ext}_R^1(M, F) = 0$ für alle $F \in KF$.

b) Jede exakte Sequenz

$$0 \longrightarrow {}_R A \longrightarrow {}_R B \longrightarrow {}_R M \longrightarrow 0 \quad \text{ist } KF - \text{korein.}$$

4.2. Definition :

Ein Modul ${}_R M$ heißt KF - absolut - korein, genau dann wenn er eine und damit beide Eigenschaften a) und b) von Lemma 4.1. hat.

Projektive Moduln sind KF - absolut - korein.

4.3. Satz :

Für den Modul ${}_R M$ sind folgende Eigenschaften äquivalent :

a) M ist KF - absolut - korein.

b) $\text{Ext}_R^1(M, F) = 0$ gilt für alle $F \in KF1$ oder $KF2$.

c) Es gibt eine KF - koreine Folge

$$0 \longrightarrow {}_R A \longrightarrow {}_R B \longrightarrow {}_R M \longrightarrow 0$$

in der ${}_R B$ - KF - absolut - korein ist.

d) M ist relativ projektiv für alle exakten Folgen

$$0 \longrightarrow_R F \longrightarrow_R Q \longrightarrow_R A \longrightarrow 0$$

in denen ${}_R Q$ ein injektiver Modul ist, und $F \in KF$
(oder $KF1$, $KF2$) gilt.

e) M ist relativ projektiv für alle exakten Folgen

$$0 \longrightarrow_R F \longrightarrow_R A \longrightarrow_R B \longrightarrow 0$$

in denen $F \in KF$ (oder $KF1$, $KF2$) gilt.

4.4. Lemma :

a) Eine direkte Summe KF - absolut - koreiner Moduln
ist KF - absolut - korein, genau dann, wenn jeder
' Summand ' diese Eigenschaft hat .

b) Ein Modul ist projektiv, genau dann, wenn er
 KF - absolut - korein und KF -korein - projektiv ist.

4.5. Lemma :

(*) sei folgende Eigenschaft eines Moduls ${}_R M$:

Jede exakte Folge $0 \longrightarrow_R M \longrightarrow_R A \longrightarrow_R B \longrightarrow 0$ ist KF - korein.

dann sind äquivalent :

a) ${}_R M$ hat die Eigenschaft (*).

b) Es gibt eine KF - koreine Folge

$$0 \longrightarrow_R M \longrightarrow_R A \longrightarrow_R B \longrightarrow 0$$

in der ${}_R A$ die Eigenschaft (*) hat.

4.6. Lemma :

Folgende Eigenschaften eines Ringes sind äquivalent :

a) Jeder projektive Modul hat die Eigenschaft (*) von Lemma 4.5.

b) Jeder Modul $F \in KF$ ist Faktormodul eines injektiven Moduls.

5. Anwendung von Dualitätsformeln.

In diesem Kapitel werde ich von folgenden Bezeichnungen Gebrauch machen :

R und S seien assoziative Ringe mit Einselement.

Ist S^M_R ein Bimodul und S^G ein Modul, dann bezeichne ich $\text{Hom}_S(S^M_R, S^G)$ mit M^G . M^G kann wie folgt zu einem

R - Linksmodul gemacht werden : Für $r \in R$, $x \in M^G$ und $m \in M$ sei $(rx)m := x(mr)$.

Ist R^M_S ein Bimodul und H_S ein Modul, dann wird analog durch $M^H := \text{Hom}_S(R^M_S, H_S)$ ein R - Rechtsmodul definiert.

Ist $f : S^A_R \rightarrow S^B_R$ ein Bimodulhomomorphismus, dann

wird durch $f^G := \text{Hom}(f, G) : B^G \rightarrow A^G$, $x \mapsto xf \in A^G$

ein Homomorphismus von R - Linksmoduln definiert.

Analog $f^H := \text{Hom}(f, H)$ für H_S und $f : R^A_S \rightarrow R^B_S$.

Zu Moduln S^G und H_S werden also durch $^G := \text{Hom}(, G)$ und

$^H := \text{Hom}(, H)$ kontravariante Funktoren von den

S - R - Bimoduln (R - S - Bimoduln) in die R - Linksmoduln (R - Rechtsmoduln) definiert.

Ist KX eine Klasse von S - R - Bimoduln, dann bezeichne ich mit KX^G die Klasse der Bilder von Moduln aus KX unter dem Funktor G (analog KX^H).

5.1. Definition :

Ein Modul M_R heißt Kogenerator, wenn es zu jedem von Null verschiedenen Homomorphismus $f : A_R \rightarrow B_R$ einen Homomorphismus $g : B_R \rightarrow M_R$ gibt, mit $gf \neq 0$.

Wie man leicht nachrechnet, gilt :

5.2. Lemma :

Sind $f : S^A_R \rightarrow S^B_R$ und $g : R^C_S \rightarrow R^D_S$ Bimodulhomomorphismen

und ${}_S G, H_S$ Moduln, dann gilt :

Sind f, g surjektiv, dann sind f^G, g^H injektiv.

Sind f^G, g^H injektiv und ${}_S G, H_S$ Kogeneratoren, dann sind f, g surjektiv.

Sind f, g injektiv und ${}_S G, H_S$ injektive S - Moduln, dann sind f^G, g^H surjektiv.

Sind f^G, g^H surjektiv und ${}_S G, H_S$ Kogeneratoren, dann sind f, g injektiv.

Sind also ${}_S G$ und H_S injektive S - Moduln, dann sind die Funktoren G und H exakt.

Sind also ${}_S G$ und H_S Kogeneratoren, dann "entdecken" die Funktoren G und H exakte Sequenzen.

Das für diese Arbeit wichtigste Beispiel dieser Funktoren erhält man, wenn man $S = \mathbb{Z}$ den Ring der ganzen Zahlen setzt und $G := H := \mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ wählt, wobei $\mathbb{Q}$ für den $\mathbb{Z}$ - Modul der rationalen Zahlen steht. $\mathbb{Q}/\mathbb{Z}$ ist als $\mathbb{Z}$ - Modul auf beiden Seiten injektiver Kogenerator und jeder R - Modul ist auch $R - \mathbb{Z}$ - Bimodul. $\text{Hom}_{\mathbb{Z}}(, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ definiert also zu jedem Ring R einen Funktor von den R - Rechtsmoduln in die R - Linksmoduln und umgekehrt. Diesen Funktor werde ich im Folgenden stets mit $*$ bezeichnen. Lambek (10) folgend werde ich den zu einem R - Modul definierten Modul $M^* = \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(M, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$ auch Charaktermodul nennen.

Ist KX eine Klasse von Moduln, dann bezeichne ich mit KX^* die Klasse der Charaktermoduln von Moduln aus KX .

Dem Buch von Cartan & Eilenberg entnehme ich die folgenden Dualitätsformeln, die ich für den Beweis der folgenden Sätze benötige.

5.3. Lemma : (Dualitätsformeln)

Ist ${}_R N_S$ ein Bimodul und sind M_R und H_S Moduln, dann sind $\text{Hom}_R(M_R, N_R^H)$ und $\text{Hom}_S(M_S, N_S^H)$ Z - isomorph.

Ist H_S injektiv, dann sind auch

$\text{Ext}_R^1(M_R, N_R^H)$ und $\text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(M_R, N), H_S)$ Z - isomorph.

Ist ${}_S M_R$ ein Bimodul und sind ${}_R N$ und ${}_S G$ Moduln, dann sind $\text{Hom}_R({}_R N, {}_R M^G)$ und $\text{Hom}_S({}_S M, {}_S N^G)$ Z - isomorph.

Ist ${}_S G$ injektiv, dann sind auch

$\text{Ext}_R^1({}_R N, {}_R M^G)$ und $\text{Hom}_S(\text{Tor}_1^R(M_R, N), {}_S G)$ Z - isomorph.

Beweis : Cartan & Eilenberg (3) Seite 28 und 120.

Als Anwendung dieser Dualitätsformeln erhält man :

5.4. Lemma :

Ist KT eine Klasse von S - R - Bimoduln, sind ${}_S G$ und H_S injektive Kogeneratoren und ist die Folge

$$0 \longrightarrow {}_R A_S \xrightarrow{f} {}_R B_S \xrightarrow{g} {}_R C_S \longrightarrow 0$$

mit Bimodulhomomorphismen f und g exakt, dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- a) $0 \longrightarrow {}_R A \xrightarrow{f} {}_R B \xrightarrow{g} {}_R C \longrightarrow 0$ ist KT^G - korein.
- b) $0 \longrightarrow T_A \longrightarrow T_B \longrightarrow T_C \longrightarrow 0$ ist exakt für alle $T \in KT$.
- c) $0 \longrightarrow C \xrightarrow{g^H} B \xrightarrow{f^H} A \longrightarrow 0$ ist KT - rein.

Beweis :

Die Folge in a) ist nach Definition genau dann KT^G - korein, wenn die natürliche Abbildung $\text{Hom}_R({}_R B, {}_R T^G) \rightarrow \text{Hom}_R({}_R A, {}_R T^G)$ für alle $T \in KT$ surjektiv ist.

Wegen der Dualitätsformeln (5.3) ist dies aber genau dann der Fall, wenn die natürliche Abbildung

$$\text{Hom}_S({}_S T_R B, {}_S G) \longrightarrow \text{Hom}_S({}_S T_R A, {}_S G) \quad \text{für alle } T \in \text{KT}$$

surjektiv ist. Da ${}_S G$ ein injektiver Kogenerator ist, ist dies genau dann der Fall, wenn die Abbildung

$$T_R A \xrightarrow{1 \otimes f} T_R B \quad \text{injektiv ist für alle } T \in \text{KT}.$$

Damit ist die Äquivalenz von a) und b) gezeigt.

Analog kann man die Äquivalenz von c) und b) zeigen :

$T_R A \xrightarrow{1 \otimes f} T_R B$ ist injektiv für alle $T \in \text{KT}$, genau dann, wenn die natürliche Abbildung

$$\text{Hom}_S(T_R B, {}_S H_S) \longrightarrow \text{Hom}_S(T_R A, {}_S H_S) \quad \text{für alle } T \in \text{KT}$$

surjektiv ist, da ${}_S H_S$ ein injektiver Kogenerator ist.

Wegen der Dualitätsformeln ist dies genau dann der Fall, wenn die natürliche Abbildung

$\text{Hom}_R(T_R, B_R^H) \longrightarrow \text{Hom}_R(T_R, A_R^H)$ für alle $T \in \text{KT}$ surjektiv ist. Das ist aber gerade die Bedingung für die KT - Reinheit der Folge in c).

5.5. Lemma :

Ist KT eine Klasse von $S - R$ - Bimoduln, ${}_S H_S$ ein Modul, ${}_S G_S$ ein Bimodul, sind ${}_S H_S$, ${}_S G_S$ und ${}_S G$ injektive Kogeneratoren und ist die Folge

$$0 \longrightarrow {}_S A_R \xrightarrow{f} {}_S B_R \xrightarrow{g} {}_S C_R \longrightarrow 0$$

mit Bimodulhomomorphismen f und g exakt, dann sind folgende Aussagen äquivalent :

- a) $0 \rightarrow {}_R C_S \xrightarrow{f} {}_R B_S \xrightarrow{g} {}_R A_S \rightarrow 0$ ist KT^G -korein.
- b) $0 \rightarrow T_{\mathbb{K}} C \xrightarrow{f} T_{\mathbb{K}} B \xrightarrow{g} T_{\mathbb{K}} A \rightarrow 0$ ist exakt für alle $T \in KT$.
- c) $0 \rightarrow {}_R A \xrightarrow{f} {}_R B \xrightarrow{g} {}_R C \rightarrow 0$ ist KT -rein.

Gilt zusätzlich für $X := A, B$ und C und für alle $T \in KT$:

Die natürliche Abbildung $T_{\mathbb{K}} X^G \rightarrow \text{Hom}_S(\text{Hom}_R(T_R, S^X_R), S^G)$

ist ein Isomorphismus,

dann ist außerdem äquivalent:

- d) $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$ ist KT -rein.

Beweis:

Analog Lemma 5.4.

Die zusätzliche Voraussetzung zu Teil d) ist erfüllt, wenn alle Moduln der Klasse KT endlich präsentierbar sind.

Mit Hilfe dieser Lemmas und mit den Charakterisierungen der KT -absolut-reinen und der KF -absolut-koreinen Moduln der vorhergehenden Kapitel kann man nun diejenigen Moduln kennzeichnen, die der Bedingung $\text{Tor}_1^R(T, M) = 0$ für alle Moduln T einer Klasse KT genügen.

5.6. Satz:

Ist KT eine Klasse von S - R -Bimoduln und sind H_S und S^G injektive Kogeneratoren, dann sind folgende Aussagen über den Bimodul ${}_R^M S$ äquivalent:

- a) $\text{Tor}_1^R(T_R, {}_R^M) = 0$ gilt für alle $T \in KT$.
- b) ${}_R^M$ ist KT -absolut-rein.
- c) ${}_R^M$ ist KT^G -absolut-korein.
- d) Jede exakte Folge $0 \rightarrow {}_R^M \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow 0$ ist KT -rein.
- e) Jede exakte Folge $0 \rightarrow {}_R^A \rightarrow {}_R^B \rightarrow {}_R^M \rightarrow 0$ ist KT^G -korein.

- f) Ist die Folge $0 \rightarrow_R A \rightarrow_R B \rightarrow_R M \rightarrow 0$ exakt und $T \in KT$, dann ist stets auch die Folge $0 \rightarrow T_A A \rightarrow T_A B \rightarrow T_A M \rightarrow 0$ exakt.
- g) Ist $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$ exakt, $T \in KT$ (und B_R frei), dann ist eine und damit sind beide der folgenden Sequenzen exakt :
- ga) $0 \rightarrow \text{Hom}_R(T, M^H) \rightarrow \text{Hom}_R(B, M^H) \rightarrow \text{Hom}_R(A, M^H) \rightarrow 0$
- gb) $0 \rightarrow A \otimes M \rightarrow B \otimes M \rightarrow T \otimes M \rightarrow 0$
- h) R^M ist relativ projektiv für jede exakte Folge $0 \rightarrow_R T^G \rightarrow_R Q \rightarrow_R A \rightarrow 0$ mit $T \in KT$ (und R^Q injektiv).

Beweis:

Die Aussagen sind Umformulierungen der Sätze 3.3. und 4.3. mit Hilfe von Lemma 5.3. und 5.4.

Teil a) von Satz 5.6. zeigt, dass dieser Satz den Begriff 'flach' verallgemeinert.

Insbesondere ist die Äquivalenz von Teil b) und Teil c) eine Verallgemeinerung folgender bekannter Tatsache (z.B. Lambek(10)) : Ein Modul ist flach genau dann, wenn sein Charaktermodul injektiv ist. Ist nämlich $S := \mathbb{Z}$ der Ring der ganzen Zahlen und sind G und H $* := \text{Hom}_{\mathbb{Z}}(, \mathbb{Q}/\mathbb{Z})$, wobei $\mathbb{Q}$ die rationalen Zahlen bezeichnen, und ist KT die Klasse der endlich präsentierbaren Rechtsmoduln, dann sind Charaktermoduln von Linksmoduln (d.h. Bilder von Linksmoduln unter dem Funktor $*$) stets KT -rein injektiv, und wegen Lemma 3.4. gilt dann : R^M hat die Eigenschaften von Satz 5.6. genau dann, wenn M^* injektiv ist.

Allgemein gilt :

5.7. Lemma :

Ist KT eine Klasse von R -Rechtsmoduln und H_S ein injektiver Kogenerator, dann sind folgende Aussagen über den Bimodul R^M_S äquivalent :

- a) M_R^H ist KT - rein - injektiv.
- b) Aus $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$ KT - rein, folgt
 stets : $0 \rightarrow A \otimes M \rightarrow B \otimes M \rightarrow C \otimes M \rightarrow 0$ ist exakt.

Beweis :

Analog zum Beweis von Lemma 5.4.

Folgerungen :

- a) Sind die KT - reinen Folgen auch rein bezüglich den endlich präsentierbaren Moduln, dann sind Charaktermoduln von Linksmoduln stets KT - rein - injektiv, da dann mit ${}_R^M$ tensorierte KT - reine Folgen exakt sind (siehe Fieldhouse (8)).
- b) Ist ${}_R^M$ flach, dann ist M^* stets KT - rein injektiv (bzw. M^H falls M ein Bimodul ${}_R^M {}_S$ und H_S ein injektiver Kogenerator ist).

6. KT -hereditäre Ringe.

Hereditäre Ringe haben folgende äquivalente Eigenschaften :

- a) Untermoduln von freien Rechts - (bzw. Links -) moduln sind projektiv.
 - b) Faktormoduln von injektiven Rechts- (bzw. Links -) moduln sind injektiv.
 - c) Summen von injektiven Untermoduln eines Rechts - (bzw. Links-) moduls sind injektiv.
- a) und b) findet man in Cartan & Eilenberg (3).
 .. c) in Matlis (17) .

Semihhereditäre Ringe sind in verschiedener Form charakterisiert worden - aber nicht durch ähnliche Eigenschaften wie die obigen. Das in dieser Arbeit entwickelte Konzept der Reinheit exakter Folgen bietet die Möglichkeit, Ringe mit Eigenschaften wie den obigen allgemein zu charakterisieren:

6.1. Satz :

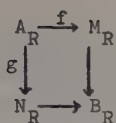
Für einen Ring R und eine Klasse von Rechtsmoduln KT sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- a) $\text{Ext}_R^2(T, M) = 0$ für alle M_R und für alle $T \in \text{KT}$ (KT1, KT2)
- b) Alle Moduln der Klasse KT (KT1, KT2) haben eine kleinere projektive Dimension als 2.
- c) $0 \longrightarrow X_R \longrightarrow F_R \longrightarrow T_R \longrightarrow 0$ exakt und F frei (projektiv) und $T \in \text{KT}$ (KT1, KT2) impliziert : X_R projektiv.
- d) Faktormoduln von KT - absolut reinen (injektiven) Moduln sind KT - absolut rein.
- e) Die Summe KT - absolut - reiner (injektiver) Untermoduln eines Moduls ist KT - absolut rein.
- f) Ist

$$\begin{array}{ccc} A_R & \longrightarrow & M_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_R & \longrightarrow & B_R \end{array}$$

 ein pushout Diagramm, und sind M und N KT - absolut - rein (injektiv), dann ist auch B KT - absolut - rein.

g) Ist



ein pushout Diagramm, sind M und N KT - absolut - rein (injektiv), ist g injektiv und existiert ein $h \in \text{Hom}_R(M, N)$ mit $hf = g$, dann ist auch B KT - absolut - rein.

Ist KT die Klasse aller Moduln, die Klasse der zyklischen oder die der singulären Moduln, dann erhält man die bekannten Charakterisierungen hereditärer Ringe.

Ist KT die Klasse der endlich präsentierten Rechtsmoduln, dann erhält man eine Charakterisierung rechtssemihereditärer Ringe, analog der am Anfang des Kapitels angegebenen Kennzeichnung hereditärer Ringe.

Beweis des Satzes :

Die Äquivalenz von a), b) und c) ist bekannt. Siehe etwa Cartan & Eilenberg (3).

c) $\Leftrightarrow$ d) :

Seien die exakten Folgen

$$0 \longrightarrow X_R \longrightarrow F_R \longrightarrow T_R \longrightarrow 0 \quad T \in KT \quad (*)$$

$$0 \longrightarrow A_R \longrightarrow M_R \longrightarrow N_R \longrightarrow 0 \quad (+)$$

und damit das kommutative Diagramm

$$\begin{array}{ccc} \text{Hom}_R(F, M) & \xrightarrow{1} & \text{Hom}_R(X, M) \\ 2 \downarrow & & \downarrow 3 \\ \text{Hom}_R(F, N) & \xrightarrow{4} & \text{Hom}_R(X, N) \end{array}$$

gegeben.

Gilt c), ist M KT - absolut - rein, und ist in (*) F frei, dann sind die Abbildungen 1 wegen Satz 3.3. und 3 - da nach Voraussetzung X projektiv ist - surjektiv.

Wegen der Kommutativität des Diagrammes ist dann auch die Abbildung 4 surjektiv, und damit - wegen Satz 3.3. - ist N KT - absolut - rein.

Gilt d), ist die Folge (*) gegeben, F projektiv, dann ist X projektiv, wenn für jede Folge (+) in der M injektiv ist, die Abbildung β surjektiv ist. Für die darin enthaltene Charakterisierung projektiver Moduln verweise ich auf Cartan & Eilenberg.

Da F projektiv ist, ist die Abbildung α surjektiv. Nach Voraussetzung ist N KT - absolut - rein, nach Satz 3.3. ist dann die Abbildung β surjektiv.

Die Behauptung folgt nun wegen der Kommutativität des Diagrammes.

d) $\Rightarrow$ f):

Nach Voraussetzung ist B wegen Definition 1.5. epimorphes Bild einer direkten Summe KT - absolut reiner Moduln. Wegen Lemma 3.4.a) ist dann auch diese direkte Summe KT - absolut - rein und nach Voraussetzung auch der Modul B .

f) $\Rightarrow$ e):

Seien M_R und N_R Untermoduln eines Moduls X_R .
ist mit den offensichtlichen Abbildungen ein pushout Diagramm.

$$\begin{array}{ccc} N \cap M & \rightarrow & M \\ \downarrow & & \downarrow \\ N & \rightarrow & N + M \end{array}$$

e) $\Rightarrow$ g):

Sei

$$\begin{array}{ccc} A_R & \xrightarrow{f} & M_R \\ \downarrow g & & \downarrow g_1 \\ N_R & \xrightarrow{f_1} & B_R \end{array}$$

ein pushout Diagramm, $h \in \text{Hom}(M, N) : hf = g$
und g injektiv, dann ist auch f injektiv,
und es gilt - siehe Freyd (9) - g_1 und f_1
sind injektiv. Also gilt :
 $N \cong \text{Bild } f_1$ und $M \cong \text{Bild } g_1$

Da das Diagramm ein pushout Diagramm ist, gilt auch

$$B = \text{Bild } f_1 + \text{Bild } g_1.$$

Sind M und N also KT - absolut - rein, dann ist B die Summe zweier KT - absolut - reiner Untermoduln, also selbst KT - absolut - rein.

g) $\Rightarrow$ d)

Sei $0 \rightarrow N_R \xrightarrow{f} M_R \rightarrow M/N \rightarrow 0$ exakt, M KT - absolut - rein.

Dann kann man ein pushout Diagramm

$$\begin{array}{ccc} N_R & \xrightarrow{f} & M_R \\ \varepsilon_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_1 \\ M_R & \xrightarrow{f_1} & B_R \end{array}$$

mit $g := f$ bilden, indem $h := 1_M$ die Voraussetzung von g) erfüllt.

Also ist B_R KT - absolut - rein.

Wie das folgende Lemma zeigt, ist M/N isomorph zu einem direkten Summanden von B , nach Lemma 3.4. also ebenfalls KT - absolut - rein.

6.2. Lemma :

Sei

$$\begin{array}{ccc} A_R & \xrightarrow{f_1} & M_R \\ \varepsilon_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 \\ N_R & \xrightarrow{f_2} & B_R \end{array}$$

ein pushout Diagramm. Wenn es eine Abbildung

$h_1 \in \text{Hom}_R(M, N)$ gibt mit : $h_1 f_1 = \varepsilon_1$,

dann gibt es einen zerfallenden

Monomorphismus $h_2 : \text{Kokern } f_1 \rightarrow B$

Beweis :

Definition 1.5. liefert die Existenz einer exakten Folge

$$A \xrightarrow{v} M \bullet N \xrightarrow{p} B \rightarrow 0$$

mit dort definierten Abbildungen v, p .

Sei $f_3 : M \rightarrow \text{Kokern } f_1$ der kanonische Epimorphismus,

dann wird durch $h_2(f_3 m) = p(m, -h_1 m)$ eine Abbildung

$h_2 : \text{Kokern } f_1 \rightarrow B$ definiert, denn aus $f_3 m = 0$

folgt : Es gibt ein $a \in A$: $m = f_1 a$. Also gilt :

$$(m, -h_1 m) = (f_1 a, -h_1 f_1 a) = (f_1 a, -\varepsilon_1 a) \in \text{Bild } v = \text{Kern } p.$$

Also gilt : $h_2(f_3 m) = 0$.

$h_3(p(m, n)) = f_3 m$ definiert eine Abbildung $h_3 : B \rightarrow \text{Kokern } f_1$,

da aus $p(m, n) = 0$ folgt : $(m, n) \in \text{Kern } p = \text{Bild } v$.

Damit ist $m \in \text{Bild } f_1 = \text{Kern } f_3$ und $f_3 m = 0$.

$$\text{Es gilt } h_3 h_2 f_3 m = h_3 p(m, -h_1 m) = f_3 m \Rightarrow h_3 h_2 = 1_{\text{Kokern } f_1}$$

Also ist h_2 zerfallender Monomorphismus.

6.3. Definition :

Ist KT eine Klasse von R - Rechtsmoduln und hat R eine und damit alle der äquivalenten Eigenschaften a) - g) von Satz 6.1., dann heißt er KT - (rechts) - hereditär.

6.4. Lemma (Folgerungen) :

Sei KT eine Klasse von R - Rechtsmoduln. Dann gilt :

a) Ist R_R KT - absolut - rein und KT - hereditär, dann sind

alle endlich erzeugten Rechtsmoduln KT - absolut rein,
und jede exakte Folge

$$(*) : 0 \longrightarrow N_R \longrightarrow M_R \longrightarrow T_R \longrightarrow 0$$

in der N endlich erzeugt und $T \in KT$ (oder KT_1, KT_2) ist,
zerfällt.

b) Sind direkte Summen von KT - absolut - reinen Moduln
 KT -absolut - rein, dann gilt :

Folgende Aussagen sind äquivalent:

ba) R_R ist KT - absolut - rein und KT - hereditär.

bb) Jeder Rechtsmodul ist KT - absolut - rein.

bc) Jeder Modul der Klasse KT ist projektiv.

bd) Jede kurze exakte Folge von Rechtsmoduln ist KT - rein.

c) Sind direkte Summen von KT - absolut - reinen R - Rechtsmoduln
 KT - absolut - rein, dann hat jeder R - Rechtsmodul
eindeutig einen maximalen KT - absolut - reinen Untermodul,
wenn R KT - hereditär ist.

Beweis :

a): Endlich erzeugte Rechtsmoduln sind Faktormoduln von
endlich erzeugten freien Moduln, sie sind KT - absolut - rein,
wenn R_R - KT - absolut-rein ist und wenn R KT - hereditär ist.
Sind endlich erzeugte Moduln KT - absolut - rein, dann
sind sie relativ injektiv für alle exakten Folgen (*).
Diese zerfallen also.

b) : Die Äquivalenz von $bb), bc)$ und $bd)$ ist offensichtlich.
Die Implikation $bb) \Rightarrow ba)$ ebenfalls.

$ba) \Rightarrow bb)$:

Jeder Modul ist Faktormodul einer direkten Summe von Exemplaren des Ringes R , nach Voraussetzung also Faktormodul eines KT - absolut - reinen Moduls, also ebenfalls KT - absolut - rein, wenn R KT - hereditär ist.

c) : Nach Voraussetzung ist die Summe aller KT - absolut - reinen Untermoduln eines Moduls M_R als Faktormodul der direkten Summe dieser Moduln KT - absolut - rein. Nach Konstruktion ist dieser Modul dann aber auch eindeutig der maximale KT - absolut - reine Untermodul von M .

Ist KT die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln, dann sind direkte Summen KT - absolut - reiner Moduln KT - absolut - rein. Der Beweis dieser bekannten Tatsache folgt im 8. Kapitel.

Die KT - absolut - reinen Moduln sind in diesem Fall die 'absolut reinen' Moduln im Sinne von Fieldhouse (8), Maddox (16), Sabbagh (18) und anderen.

6.4.b) wird zu einer Kennzeichnung der regulären Ringe.

7. KF - kohereditäre Ringe .

Die im 6. Kapitel entwickelte Theorie kann man dualisieren und erhält dabei Aussagen über Ringe, für die Untermoduln von KF - absolut - koreinen Moduln KF - absolut - korein sind - für eine Klasse von Linksmoduln KF.

Von besonderem Interesse sind diese Aussagen, wenn man für KF die Klasse der Charaktermoduln einer Klasse von Rechtsmoduln nimmt.

7.1 Satz :

Für einen Ring R und eine Klasse von Linksmoduln KF sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- $\text{Ext}_R^2(M, F) = 0$ für alle ${}_R M$ und für alle $F \in \text{KF}$ (KF1, KF2).
- Alle Moduln der Klasse KF (KF1, KF2) haben eine kleinere injektive Dimension als 2 .
- $0 \longrightarrow {}_R F \longrightarrow {}_R Q \longrightarrow {}_R X \longrightarrow 0$ exakt und Q injektiv und $F \in \text{KF}$ (KF1, KF2) impliziert : ${}_R X$ injektiv.
- Untermoduln von KF - absolut - koreinen Moduln sind KF - absolut - korein. (Untermoduln von projektiven Moduln sind KF - absolut - korein).
- Der Durchschnitt KF - absolut - koreiner (projektiver) Untermoduln eines Moduls ist KF - absolut - korein.
- Ist

$$\begin{array}{ccc} R^A & \longrightarrow & R^M \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^N & \longrightarrow & R^B \end{array}$$

 ein pullback Diagramm, und sind M und N KF - absolut - korein (projektiver), dann ist auch A KF - absolut - korein.
- Ist

$$\begin{array}{ccc} R^A & \xrightarrow{f_1} & R^M \\ \varepsilon_1 \downarrow & & \downarrow \varepsilon_2 \\ R^N & \xrightarrow{f_2} & R^B \end{array}$$

 ein pullback Diagramm, sind M und N KF - absolut - korein (projektiver), ist f_2 surjektiv und existiert ein $h \in \text{Hom}_R(N, M)$ mit : $\varepsilon_2 h = f_2$, dann ist auch A KF - absolut - korein.

7.2. Lemma :

$$\begin{array}{ccc} R^A & \xrightarrow{f_1} & R^M \\ g_1 \downarrow & & \downarrow g_2 \\ R^N & \xrightarrow{f_2} & R^B \end{array}$$

sei ein pullback Diagramm. Wenn es eine Abbildung $h_1 \in \text{Hom}_R(N, M)$ gibt, mit : $g_2 h_1 = f_2$, dann gibt es einen zerfallenden Epimorphismus $h_2 : A \longrightarrow \text{Kern } g_2$.

Die Beweise von Satz 7.1. und Lemma 7.2. ergeben sich durch Dualisierung der entsprechenden Beweise von Satz 6.1. und Lemma 6.2. mit Ausnahme des Beweises $\Rightarrow 7.1.e) \Rightarrow$, da diese Aussage nicht dual zu 6.1.e) ist. Die zu 6.1.e) und 7.1.e) dualen Aussagen gelten jedoch ebenfalls - sind aber nicht sehr 'Übersichtlich'. Beweis 7.1.f) $\Rightarrow$ 7.1.e) :

Der Beweis ist trivial, da das im entsprechenden Beweis 6.1.f) $\Rightarrow$ 6.1.e) angegebene Diagramm offenbar auch ein pullback Diagramm ist.

Beweis 7.1.e) $\Rightarrow$ 7.1.d) $\Rightarrow$ 7.1.g) :

Die zweite Implikation ist klar, da nach Definition 1.5. der Modul A in Aussage g) isomorph zu einem Untermodul der direkten Summe von M und N ist. Die Behauptung folgt dann mit Lemma 4.4. aus d). Gilt nun Aussage 7.1.e) und ist A Untermodul von M, dann kann man ein pushout Diagramm konstruieren :

$$\begin{array}{ccc} A & \xrightarrow{f} & M \\ f \downarrow & & \downarrow g \\ M & \xrightarrow{h} & B \end{array}$$

so daß f die Inklusionsabbildung ist. Dann sind auch g und h injektive Abbildungen, also gilt :
M, Bild g und Bild h sind isomorph. Man kann nun leicht zeigen, daß auch A und Bild $g \cap \text{Bild } h$ isomorph sind, woraus die Aussage 7.1.d) folgt.

7.3. Definition :

Ist KF eine Klasse von R - Linksmoduln und hat R eine und damit alle der äquivalenten Eigenschaften a) - g) von Satz 7.1., dann heißt R KF - (links) - kohärent.

Ist KF die Klasse der Charaktermoduln von endlich präsentierbaren Rechtsmoduln, dann sind die KF - absolut - kohärenten Linksmoduln gerade die flachen Linksmoduln, und Satz 7.1. wird zu einer Charakterisierung der Ringe mit schwacher globaler Dimension ≤ 1 .

Eine Verallgemeinerung dieser Aussage ist das folgende Lemma:

7.4. Lemma :

Ist KT eine Klasse von $S - R$ - Bimoduln und ${}_S G$ ein injektiver Kogenerator, dann gilt mit den Bezeichnungen des 5. Kapitels :

a) Ist ${}_R R$ KT^G - kohärent, dann gilt stets : Ist

$0 \rightarrow {}_S A_R \rightarrow {}_S P_R \rightarrow {}_S T_R \rightarrow 0$ als Folge von Bimoduln exakt, P_R flach und $T \in KT$, dann ist auch A_R flach.

b) Ist in jeder exakten Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow P_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$ mit freiem P_R und $T \in KT$ A_R flach, dann ist ${}_R R$ KT^G - kohärent.

Beweis :

a) Die exakte Folge in der Aussage a) sei gegeben, dann ist auch

$0 \rightarrow R^T \rightarrow R^P \rightarrow R^A \rightarrow 0$ exakt und R^P ist injektiv (siehe Lambek (10) Seite 131). Aus 7.1.a) folgt dann : R^A ist injektiv, dann ist aber auch A_R flach. Ist nämlich $0 \rightarrow R^X \rightarrow R^Y$ exakt, dann ist auch $\text{Hom}_R(Y, A^G) \rightarrow \text{Hom}_R(X, A^G) \rightarrow 0$ wegen der R - Injektivität von A^G exakt und wegen der Dualitätsformeln 5.3. auch $\text{Hom}_S(A_M Y, {}_S G) \rightarrow \text{Hom}_S(A_M X, {}_S G) \rightarrow 0$.

Da ${}_S G$ injektiver Kogenerator ist, ist dann auch

$0 \rightarrow A_M X \rightarrow A_M Y$ exakt. Damit ist die Flachheit von A_R nachgewiesen (siehe Lambek (10) Seite 131).

b) Es wird die definierende Eigenschaft 7.1.d) kohärenter Ringe nachgewiesen. Sei also ${}_R M$ Untermodul eines KT^G - absolut - koreinen Moduls ${}_R N$. Zu zeigen ist : ${}_R N$ ist ebenfalls KT^G - absolut - korein. Wegen der Äquivalenz der Eigenschaften 5.6.c) und 5.6.g) Teil gb), genügt es zu zeigen :

Ist die Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow P_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$ exakt, $T \in KT$ und P_R frei, dann ist auch $0 \rightarrow A_M M \rightarrow P_M M$ exakt.

Nach Voraussetzung sind dann aber in dem Diagramm

$$\begin{array}{ccc} A_M M & \xrightarrow{1} & P_M M \\ \downarrow 2 & & \downarrow 3 \\ A_M N & \xrightarrow{4} & P_M N \end{array}$$

- mit den offensichtlichen Abbildungen -

die Abbildungen 2 und 4 injektiv.

Wegen der Kommutativität des Diagrammes ist dann auch die Abbildung 1 injektiv, das war aber gerade zu zeigen.

7.5. Folgerungen :

a) Ist KT eine Klasse von R - Rechtsmoduln, KT^* die Klasse der Charaktermoduln von Moduln aus KT , dann sind folgende Aussagen äquivalent :

aa) ${}_R R$ ist KT^* -kohereditär.

ab) Aus $\dots \rightarrow A_R \rightarrow P_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$ exakt,

P_R frei und $T \in KT$ folgt stets :

Λ_R ist flach.

b) Ist KT eine Klasse von R - Rechtsmoduln und ist R KT - hereditär, dann ist R auch KT^* -kohereditär.

Beweis:

a) folgt direkt aus 7.4. da jeder R - Modul auch Z - R - Bimodul ist.

b) folgt aus Satz 7.1.d) und Satz 6.1.d) mit Hilfe der Äquivalenz der Eigenschaften b) und c) von Satz 5.6.

7.5.b) ist eine Verallgemeinerung der bekannten Tatsache, daß semihereditäre Ringe schwache globale Dimension ≤ 1 haben.

7.4. zeigt, daß KT^G -kohereditäre Ringe eine Verallgemeinerung von Ringen mit schwacher globaler Dimension ≤ 1 sind.

Nicht alle Aussagen von Lemma 6.4. lassen sich mit Erfolg dualisieren, aber es gilt :

7.6. Lemma :

KF sei eine Klasse von R - Linksmoduln, dann gilt :

a) Sind Produkte von KF - absolut - koreinen Moduln
KF - absolut - korein, dann sind folgende Aussagen äquivalent:

aa) R ist KF - kohärent und es gibt einen KF - absolut - koreinen Linksmodul, der ein Kogenerator ist.

ab) Jeder Linksmodul ist KF - absolut - korein.

ac) Jeder Modul der Klasse KF ist injektiv.

ad) Jede kurze exakte Folge von Linksmoduln ist KF - korein.

b) Sind direkte Produkte von KF - absolut - koreinen Moduln
KF - absolut - korein, und ist R KF - kohärent,
dann hat jeder Modul eindeutig einen minimalen Untermodul
 $R^N \subseteq R^M$ mit : M/N ist KF - absolut - korein.

Die Beweise ergeben sich durch dualisieren der entsprechenden Beweise von Lemma 6.4. Dennoch möchte ich den Beweis zu Teil

b) skizzieren :

Sei R^M ein Modul und $\{N_i : i \in I\}$ die Familie der Untermoduln von M mit der Eigenschaft : M/N_i ist KF - absolut - korein. Diese Familie ist nicht leer, da ihr M angehört.

Sei $N := \bigcap_{i \in I} N_i$, dann gibt es einen Monomorphismus :

$M/N \longrightarrow \prod_{i \in I} M/N_i$. Aus den Voraussetzungen folgt

nun unmittelbar, dass M/N KF - absolut - korein ist, und nach Konstruktion ist N auch eindeutig minimal mit dieser Eigenschaft.

Ist KT die Klasse der endlich präsentierten Rechtsmoduln, und KT^* die Klasse der Charaktermoduln von Moduln aus KT , dann sind die KT^* - absolut-koreinen Linksmoduln gerade die flachen, und Produkte von KT^* - absolut - koreinen Moduln sind KT^* - absolut - korein genau dann, wenn der Ring rechtskohärent ist.

Teil a) von Lemma 7.6. ergibt dann eine Charakterisierung regulärer Ringe durch 1) schwache globale Dimension ≤ 1 und 2) die Existenz eines flachen Kogenerators und 3) Kohärenz.

8. Anwendungen.

In diesem Kapitel wird die bisher entwickelte Theorie bei spezieller Wahl der Klassen KT und KF untersucht.

8.1. Die Klasse aller Moduln.

Sei KT die Klasse aller Rechtsmoduln eines Ringes R und KF die Klasse seiner Linksmoduln.

Die KT - reinen Folgen sind die zerfallenden Folgen von Rechtsmoduln, die KT - absolut - reinen Moduln sind die injektiven Rechtsmoduln.

Die KT^* - absolut - koreinen Moduln sind die flachen Linksmoduln.

Die KT -hereditären Ringe sind die rechtshereditären Ringe.

Die KF - koreinen Folgen sind die zerfallenden Folgen von Linksmoduln, die KF - absolut - koreinen Moduln sind die projektiven Linksmoduln.

Die KF - kohereditären Ringe sind die linkshereditären Ringe.

Insbesondere ergibt 7.1.e): Ein Ring ist linkshereditär genau dann, wenn der Durchschnitt projektiver Untermoduln von Linksmoduln stets projektiv ist.

3.2. Die Klasse der singulären Moduln.

Ein Rechtsmodul heißt singulär, wenn jedes Element einen großen Annulator hat.

Sei KT die Klasse der singulären Rechtsmoduln eines Ringes.

Über die KT - reinen Folgen kann ich im Allgemeinen nichts aussagen. Sicher sind aber - wie in jedem Beispiel -

die zerfallenden kurzen exakten Sequenzen KT - rein sowie auch diejenigen, die mit einem Modul enden, der keinen von Null verschiedenen singulären Untermodul hat.

Wegen Lemma 1.10. ist der erste Modul einer KT - reinen Folge stets abgeschlossener Untermodul des zweiten.

Wegen 3.3.d) und der bekannten Charakterisierung injektiver Moduln durch relative Injektivität bezüglich Inklusionen großer Rechtsideale, sind die KT - absolut - reinen Moduln wieder die Injektiven und daher die KT - hereditären auch wieder die rechtshereditären Ringe.

8.3. Die Klasse der zyklischen Moduln.

Sei KT die Klasse der zyklischen Moduln.

Wie im vorhergehenden Beispiel kann man über die KT - reinen Folgen nicht viel sagen, weiß aber wegen der bekannten Eigenschaften injektiver Moduln, daß die KT - absolut - reinen Moduln gerade die injektiven Moduln sind.

Die KT - hereditären Ringe sind also wieder die rechts - hereditären Ringe und man erhält die bekannte Charakterisierung derselben durch die Projektivität der Rechtsideale von R .

8.4. Die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln.

Die wichtigsten Beispiele für die in dieser Arbeit entwickelten Theorien erhält man, wenn man die Klasse der endlich präsentierbaren Moduln untersucht.

Dabei heißt ein Modul endlich präsentierbar, wenn er Faktormodul eines endlich erzeugten freien Moduls nach einem endlich erzeugten Untermodul ist. Andere Charakterisierungen dieser Moduln findet man bei Lenzing (13).

Sei also KT die Klasse der endlich präsentierbaren Rechtsmoduln und KF die Klasse der endlich präsentierbaren Linksmoduln.

Für diesen Fall findet man in der Literatur folgende Charakterisierung KT - reiner Folgen : (siehe z.B. : Fieldhouse (8), Stenström(22) und Warfield (25))

Für eine exakte Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$ (*) sind folgende Aussagen äquivalent :

- a) Für jeden Modul $_R M$ ist $0 \rightarrow A \otimes M \rightarrow B \otimes M \rightarrow C \otimes M \rightarrow 0$ exakt.
- b) Die Folge ist KT - rein im Sinne der Definition 1.1.

Diese Folgen werden von den oben angegebenen Autoren 'rein' genannt.

Da jeder Modul filtrierender induktiver Limes von endlich präsentierbaren Moduln ist (Bourbaki (1) chap.I, §2, ex.10) und solche Limites mit Tensorprodukten vertauschen, ist a) äquivalent zu :

- a') Für jeden Modul $F \in KF$ ist $0 \rightarrow A \otimes F \rightarrow B \otimes F \rightarrow C \otimes F \rightarrow 0$ exakt.

Mit Lemma 5.3. erhält man dann : a), a') und b) sind äquivalent zu:

- c) Die Folge (*) ist KF^* -korein.
- d) Die Folge $0 \rightarrow {}_R C^* \rightarrow {}_R B^* \rightarrow {}_R A^* \rightarrow 0$ ist KF - rein, d.h. 'rein' als Folge von Linksmoduln.

Wegen Lemma 5.7. folgt aus der Bedingung a) : Charaktermoduln von Rechtsmoduln sind als Linksmoduln stets (KF -) rein - injektiv und mit Lemma 1.9. folgt daher :

a) d) sind äquivalent zu :

e) Die Folge $0 \rightarrow {}_R C^* \rightarrow {}_R B^* \rightarrow {}_R A^* \rightarrow 0$ zerfällt.

Auch die in dieser Situation KT - absolut - reinen Moduln sind schon charakterisiert worden : etwa von Maddox (16), Sabbagh (18), Fieldhouse (8) , Stenström (23) und Warfield (25). Sie werden dort 'absolut - rein' oder 'FP - injektiv' genannt. Die Äquivalenz dieser Begriffe zeigt Satz 3.3. Der Begriff 'absolut - rein' wird im Allgemeinen wie hier durch die Eigenschaften von Lemma 3.1. definiert. Die Aussage 3.3.d) wird in der oben erwähnten Literatur als definierende Eigenschaft 'FP - injektiver ' Moduln verwendet: Diese Moduln werden durch Injektivität für Einbettungen endlich erzeugter Moduln in freie Moduln definiert.

Satz 5.6. zeigt, daß die KT^* - absolut - ~~korein~~ reinen Moduln in dieser Situation gerade die flachen Linksmoduln sind. Dieser Satz wird daher in diesem Spezialfall zu einer Charakterisierung flacher Moduln. Insbesondere erhält man die bereits erwähnte Aussage : Ein Modul ist flach, genau dann wenn sein Charaktermodul absolut - rein oder injektiv ist.

Teil d) der oben abgeleiteten Charakterisierung (KT -) reiner Folgen ergibt, daß in diesem Fall die in Lemma 3.5. definierte Eigenschaft eines Moduls M_R , daß jede kurze exakte Sequenz, die mit ihm endet, (KT -) rein ist, gleichwertig mit der Flachheit dieses Moduls ist, denn ein Modul M_R hat diese Eigenschaft , genau dann wenn er KF^* - absolut - korein, also als Rechtsmodul flach ist.

Die KT - hereditären Ringe sind in dieser Situation gerade die rechtssemihereditären, da dann jeder endlich erzeugte Untermodul eines freien Rechtsmoduls projektiv ist.

Satz 6.1. kennzeichnet diese Ringe wie folgt :

Für einen Ring R sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- a) R ist rechtssemihereditär.
- b) Faktormoduln von injektiven Rechtsmoduln sind absolut - rein.
- c) Faktormoduln von absolut - reinen Rechtsmoduln sind absolut - rein.
- d) Summen von absolut - reinen (injektiven) Untermoduln eines Moduls sind absolut - rein.
- e) Sind in einem pushout Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} A_R & \xrightarrow{\quad} & M_R \\ \downarrow & & \downarrow \\ N_R & \xrightarrow{\quad} & B_R \end{array}$$

 M und N absolut - rein (injektiv),
dann ist auch B absolut rein.

Eine weitere äquivalente Eigenschaft ist die folgende :

- f) Jeder Rechtsmodul besitzt einen eindeutig bestimmten maximalen absolut - reinen Untermodul.

Beweis der Implikationen c) $\Rightarrow$ f) $\Rightarrow$ d) :

Da ein Modul absolut - rein ist, genau dann wenn er relativ injektiv ist für jede exakte Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow F_R \rightarrow T_R \rightarrow 0$ in der T endlich präsentierbar, A und F endlich erzeugt und F frei ist, und $\text{Hom}(X,)$ für endlich erzeugtes X mit direkten Summen vertauscht, sind direkte Summen von absolut - reinen Moduln absolut - rein.

Die erste Implikation folgt daher unmittelbar aus Lemma 6.4.c). Weiterhin gilt folgende auch von Maddox (16) benützte und bewiesene Aussage : Ist $\{M_i : i \in I\}$ eine aufsteigende Kette absolut - reiner Untermoduln eines Moduls N , dann ist auch die Vereinigung dieser Moduln absolut - rein.

Gilt nun Aussage f) und sind M_1 und M_2 absolut reine Untermoduln eines Moduls, dann sind die Mengen $\{U : U \text{ ist absolut reiner Untermodul von } M_1 + M_2 \text{ mit } M_1 \subseteq U\}$ und $\{U : U \text{ ist absolut reiner Untermodul von } M_1 + M_2 \text{ mit } M_2 \subseteq U\}$ nichtleer. Aus der oben erwähnten Aussage folgt daher mit dem Zorn'schen Lemma die Existenz maximaler Elemente N_1 und N_2 dieser Mengen. Diese sind offenbar auch maximal in der Menge der absolut reinen Untermoduln von $M_1 + M_2$. Nach Voraussetzung gilt daher $N_1 = N_2$ und daher nach Konstruktion $M_1 + M_2 = N_1 = N_2$, also ist $M_1 + M_2$ absolut rein. Damit ist auch die zweite Implikation gezeigt.

Damit ist eine Frage beantwortet, die Maddox (16) am Ende seiner Arbeit stellt.

Da ein Ring (von Neumann -) regulär ist, genau dann wenn jeder endlich präsentierbare Modul projektiv ist, folgt als Anwendung von Lemma 6.4.b) : Ein Ring ist regulär, genau dann wenn er als Rechtsmodul (oder als Linksmodul) semihereditär und absolut rein ist.

Da die KT^* - absolut - koreinen Moduln gerade die flachen Linksmoduln sind, sind die KT^* - kohereditären Ringe gerade diejenigen mit schwacher globaler Dimension ≤ 1 . Satz 7.1. charakterisiert diese Ringe wie folgt :

Für einen Ring sind folgende Eigenschaften äquivalent :

- a) R hat schwache globale Dimension ≤ 1 .
- b) Untermoduln flacher Linksmoduln sind flach.
- c) Untermoduln projektiver Linksmoduln sind flach.
- d) Durchschnitte flacher (projektiver) Untermoduln eines Linksmoduls sind flach.
- e) Sind in einem pullback Diagramm :

$$\begin{array}{ccc} R^A & \xrightarrow{\quad} & R^M \\ \downarrow & & \downarrow \\ R^N & \xrightarrow{\quad} & R^B \end{array}$$

 M und N flach (projektiv), dann ist auch A flach .
- f) Charaktermoduln von endlich präsentierbaren Rechtsmoduln haben injektive Dimension ≤ 1 .

Rechts - (oder links -) semihereditäre Ringe haben schwache globale Dimension ≤ 1 . (7.5.b)).

Über die für die endlich präsentierbaren Linksmoduln (also KF -) koreinen Folgen ist im Allgemeinen nichts bekannt, aber es gilt : Jeder Modul ist KF - absolut - korein, genau dann wenn jeder endlich präsentierbare Linksmodul injektiv ist.

In Verallgemeinerung eines Satzes von Osofsky ist in (7) vermutet worden, dass diese Eigenschaft gerade die regulären, linksinjektiven Ringe kennzeichnet. Wenn der Ring zusätzlich linkskohärent ist - d.h. wenn endlich erzeugte Untermoduln freier Linksmoduln endlich präsentierbar sind - gilt dies, da dann die endlich erzeugten Links Ideale des Ringes endlich präsentierbar und damit injektiv also direkte Summanden des Ringes sind.

In dieser Situation erhält man Beispiele kohereditärer Ringe. Setzt man nämlich $KE :=$ Klasse der endlich erzeugten Untermoduln von freien Linksmoduln, dann gilt wegen Satz 7.1.b) : Sind alle endlich präsentierbaren Linksmodul injektiv, dann ist $R \in KE$ - kohereditär.

8.5. RD - reine Folgen .

Ein Spezialfall der in dieser Arbeit entwickelten Theorie ist auch der Begriff ' RD - rein ', wie er etwa von Warfield in (25) definiert wird.

Sei RD die Klasse der Moduln, die die Form R/xR mit $x \in R$ haben. Dann ist eine exakte Folge

$$0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0 \quad (+)$$

RD - rein im Sinne von Definition 1.1., genau dann wenn sie RD - rein im Sinne von Warfield (25) ist, d.h. wenn eine und damit beide der folgenden Bedingungen erfüllt ist :

- a) Für jedes $r \in R$ gilt : $Br \cap A = Ar$.
- b) Für jedes $r \in R$ ist die Folge $0 \rightarrow A \otimes R/Rr \rightarrow B \otimes R/Rr$ exakt.

Den Beweis für die Äquivalenz dieser Eigenschaften findet man bei Warfield (25).

Ist KF die Klasse der Moduln der Form R/Rx mit $x \in R$, dann ergibt sich hieraus und mit Lemma 5.4. noch folgende Kennzeichnung der RD - reinen Folgen :

Die exakte Folge (+) ist RD - rein, genau dann wenn sie KF^* - korein ist und genau dann, wenn die Folge $0 \rightarrow {}_R C^* \rightarrow {}_R B^* \rightarrow {}_R A^* \rightarrow 0$ KF - rein ist, d.h. 'RD - rein' als Folge von Linksmoduln.

Die RD - absolut - reinen Moduln sind die für alle Folgen $0 \rightarrow rR \rightarrow R \rightarrow R/rR \rightarrow 0$ mit $r \in R$ relativ injektiven Moduln.

Die RD - hereditären Ringe sind diejenigen Ringe, deren zyklische Rechtsideale projektiv sind.

Ein Ring ist regulär, genau dann wenn er RD - absolut - rein und RD - hereditär ist.

8.6. Reinheit und Torsionstheorien.

Zusätzliche Aussagen über die in dieser Arbeit definierten Begriffe kann man machen, wenn man mehr über die zu Grunde liegenden Klassen von Moduln weiß.

In diesem Abschnitt wird der Fall untersucht, daß KT die Klasse der Torsionsmoduln und KF die Klasse der Torsionsfreien Moduln einer Torsionstheorie ist. Anders als bisher ist KF im Folgenden stets eine Klasse von Rechtsmoduln. Ich nenne (KT, KF, KI, T) eine Torsionstheorie, wenn folgendes gilt :

KT ist eine Klasse von R - Rechtsmoduln mit : KT ist abgeschlossen gegen direkte Summenbildung und für jede exakte Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$ gilt :

$$A, C \in KT \Leftrightarrow B \in KT.$$

KF ist die Klasse der Rechtsmoduln, die keinen Untermodul von KT haben. Offenbar ist KF gegen Untermodulbildung abgeschlossen.

KI ist die Klasse der Rechtsideale $I \subseteq R$, für die $R/I \in KT$ gilt. KI ist so ein ' idempotenter Idealfilter ' .

T ist der Unterfunctor der Identität, der jedem Modul M seinen maximalen Torsionsuntermodul zuordnet : $TM := \sum \{ U \subseteq M : U \in KT \}$. Für jeden Modul M gilt dann : $TTM = TM$, $M/TM \in KF$ und $TM \in KT$.

Äquivalente Definitionen und weitere Eigenschaften von Torsionstheorien findet man bei Lambek (11).

Im Folgenden sei (KT, KF, KI, T) stets eine Torsionstheorie. Die Moduln der Klasse KT sind dann 'Torsionsmoduln', die der Klasse KF 'torsionsfrei'.

Wegen Lemma 1.10. und Lemma 2.10. stimmt KT - Reinheit und KF - Koreinheit im Sinne der Definitionen 1.1. und 2.1. mit der von Walker (24) überein und es kann das folgende Lemma aus dieser Arbeit zitiert werden :

8.6.1. Lemma :

Die Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$ ist KT - rein, genau dann wenn $0 \rightarrow TA \rightarrow TB \rightarrow TC \rightarrow 0$ - KF - korein, genau dann wenn $0 \rightarrow A/TA \rightarrow B/TB \rightarrow C/TC \rightarrow 0$ exakt ist und zerfällt.

Folgerungen :

$$0 \longrightarrow A_R \longrightarrow B_R \longrightarrow C_R \longrightarrow 0$$

ist KT - rein, wenn $TC = 0$ gilt.

ist KF - korein, wenn $TA = A$ gilt.

Die KT - absolut - reinen Moduln werden durch das folgende Lemma charakterisiert:

8.6.2. Lemma :

(KT, KF, KI, T) sei Torsionstheorie, dann ist M_R KT - absolut - rein, genau dann, wenn M relativ injektiv ist für alle exakten Folgen $0 \longrightarrow K_R \longrightarrow R \longrightarrow R/K \longrightarrow 0$ mit $K \in KI$.

Beweis :

Sei $0 \longrightarrow X_R \xrightarrow{g} Y_R \xrightarrow{p} T_R \longrightarrow 0$ gegeben, $T \in KT$.

Wegen Satz 3.3. genügt es zu zeigen : M ist relativ injektiv für diese Folge. (Die andere Richtung des Beweises ist klar).

Sei also $f \in \text{Hom}_R(X, M)$. Mit Hilfe von Zorn's Lemma kann man einen maximalen Modul $Z: fX \subseteq Z \subseteq Y$ finden, auf dem sich f über g auf Z fortsetzen lässt. Wäre $Z \neq Y$ und $y \in Y$ mit $y \notin Z$, dann gilt :

$$A = \{r \in R : yr \in Z\} \supsetneq \{r \in R : yr \in fX\} = \{r \in R : pyr = 0\} \in KI.$$

Also auch $A \in KI$.

Ist $h : Z \longrightarrow M$ die Fortsetzung von f über g auf Z , dann gibt es in dem folgenden Diagramm, wegen der Voraussetzungen über M die Abbildung h_1 . Da beide Quadrate pushout Diagramme sind - nach Konstruktion von A , gibt es auch die Abbildungen h_2 und h_3 mit : $h = h_3v$. Auch h_3 setzt dann f über $Z+yR$ nach M fort und wegen der Maximalität von Z gilt $Z = Z+yR$. Widerspruch ! Also $Z = Y$ und daher kann man f über Y nach M fortsetzen, also ist M KT - absolut - rein.

$$\begin{array}{ccccc}
 A & \longrightarrow & Z \cap yR & \longrightarrow & Z \\
 \downarrow & & \downarrow & & \downarrow v \\
 R & \longrightarrow & yR & \longrightarrow & Z + yR \\
 & \searrow h_1 & \searrow h_2 & \searrow h_3 & \searrow h \\
 & & & & M
 \end{array}$$

Als Folgerung erhält man :

a):

R_R ist KT - hereditär

$\Leftrightarrow$

Faktormoduln von KT - absolut reinen Moduln sind KT - absolut rein.

$\Leftrightarrow$

Alle Rechtsideale $K \in KI$ sind projektiv.

b):

R^M ist KT^* - absolut korein

$\Leftrightarrow$

Für alle $K \in KI$ ist $0 \rightarrow K \otimes M \rightarrow R \otimes M$ exakt.

Die KT - rein injektiven kann man in diesem Fall wie folgt charakterisieren :

8.6.3. Lemma :

Für eine Torsionstheorie (KT, KF, KI, T) und einen Modul M_R sind äquivalent :

- 1) M ist KT - rein injektiv
- 2) M ist KF - absolut - rein
- 3) $\text{Ext}_R^1(F, M) = 0$ für alle $F \in KF$.

Beweis :

2) $\Leftrightarrow$ 3): per Definitionem.

1) $\Rightarrow$ 2):

Für alle exakten Folgen $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow F_R \rightarrow 0$ mit $F \in KF$

gilt wegen der Folgerung zu Lemma 8.6.1. :

Sie sind KT - rein. Ist M KT - rein injektiv, dann ist M also relativ injektiv für diese Folgen und damit nach Satz 3.3. KF - absolut - rein.

2) $\Rightarrow$ 1):

Sei M KF - absolut - rein. Zu zeigen ist : M ist relativ injektiv für jede KT - reine Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$.

Nun kann man zu einer solchen Folge aber eine Erweiterung

$A \rightarrow X_R$ angeben, so daß man eine exakte Folge :

$0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow C/TC \rightarrow 0$ erhält.

Dann gilt : $X/A \cong TC \in KT$ und aus Lemma 1.10. folgt, daß die Einbettung $A \rightarrow X$ zerfallender Monomorphismus ist.

Daher ist M relativ injektiv für die Folge

$0 \rightarrow A \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow 0$, wenn M relativ injektiv für

$0 \rightarrow X \rightarrow B \rightarrow C/TC \rightarrow 0$ ist.

Das ist aber nach Voraussetzung der Fall, da M KF - absolut - rein ist, $C/TC \in KF$ gilt und daher Satz 3.3. angewendet werden kann.

Folgerungen :

Folgende Aussagen über den Modul R^M sind äquivalent :

a) R^M ist KF^* - absolut - korein.

b) M_R^* ist KF - absolut - rein.

c) M_R^* ist KT - rein - injektiv.

d) Für jede KT - reine Folge $0 \rightarrow A_R \rightarrow B_R \rightarrow C_R \rightarrow 0$
ist $0 \rightarrow A_M \rightarrow B_M \rightarrow C_M \rightarrow 0$ exakt.

Beweis : Lemma 5.7. und Lemma 8.6.3.

Ausserdem gilt :

R_R ist hereditär, genau dann wenn R KF - und KT - hereditär ist.

Beweis : Lemma 3.4.b) und Lemma 8.6.3.

Literaturverzeichnis.

1. Bourbaki, N. Algèbre Commutative chap. 1.2.
Hermann 1961
2. Bourbaki, N. Algèbre, chap. 1.2.3. Hermann 1970
3. Cartan & Eilenberg: Homological Algebra, Princeton 1956
4. Cateforis, V.C. On Regular Selfinjective Rings,
Pacific Journal of Mathematics,
Vol. 30 no.1, 1969
5. Cateforis, V.C. Flat Regular Quotient Rings,
Trans. of the American Math. Soc.
138, 1968
6. Chase, S.U. Direct Product of Modules, Trans.
of the American Math. Soc. 97, 1960
7. Faith, C. Lectures on Injective Modules and
Quotient Rings, Lecture Notes 49,
Springer 1967
8. Fieldhouse, D.J. Pure Theories, Math. Ann. 184, 1969
9. Freyd, P. Abelian Categories, Harper 1964
10. Lambek, J. Lectures on Rings and Modules,
Blaisdell 1966
11. Lambek, J. Torsion Theories, Lecture Notes 177,
Springer 1971
12. Lazard, D. Autour de la Platitude, Bull. soc.
math. France 97, 1969
13. Lenzing, H. Endlich präsentierbare Moduln Arch.
d. Math. 20, 1969
14. Lenzing, H. Über Kohärente Ringe, Math. Z. 114,
1970
15. MacLane, S. Homology, Springer 1970
16. Maddox, B.H. Absolutely Pure Modules, Proc. Americ.
Math. Soc. 18, 1967
17. Matlis, E. Injective Modules over Noetherian
Rings, Pac. J. Math. 8, 1958
18. Sabbagh, G. Sur la pureté dans les modules,
C.R. Acad. Sc. Paris, t 271, 1970,
A- 865

19. Sandomierski, F.L. Nonsingular Rings, Proc. Am. Math. Soc. 19, 1966
20. Sandomierski, F.L. The Singular Module Splittings Off , und Cateforis, V.C. Journal of Algebra 10, 1968
21. Small, L.W. Semihereditary Rings, Bull. Am. Math. Soc. 73, 1967
22. Stenström, B.T. Pure Submodules, Arkiv För Matematik, Band 7 Nr. 10, 1966
23. Stenström, B.T. Coherent Rings and FP - Injective Modules, J. London Math. Soc. 2, 1970
24. Walker, C.P. Relative Homological Algebra and Abelian Groups, Illinois J. of Math. 10, 1966
25. Warfield, R.B. Jr. Purity and Algebraic Compactness for Modules, Pac. J. of Math. 28, 1969

Lebenslauf

Ich wurde am 13.1.1945 als Sohn des Juristen Dr. Bernd Sommer und seiner Frau Ena geb. von Gürgens in Amorbach im Odenwald geboren.

Von 1951 bis 1955 besuchte ich in Frankfurt am Main eine Volksschule, anschliessend bis zum Abitur im Jahre 1964 das Gymnasium Taunusschule in Königstein im Taunus.

Von 1964 bis 1966 studierte ich in Göttingen Mathematik. Nachdem ich dort das Vordiplom bestanden hatte, setzte ich mein Studium an der Universität München fort.

Dort bestand ich im Jahre 1969 die Diplomprüfung im Fache Mathematik.

Seitdem bin ich als Mitarbeiter am Mathematischen Institut der Technischen Universität München tätig.

